COURS DE MATHÉMATIQUES

SIXIÈMES MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Valère BONNET (valere.bonnet@eeb1.eu)

12 septembre 2012

ÉCOLE EUROPÉENNE BRUXELLES I

Table des matières

Chapitre I

Vocabulaire de la logique

I.1 Qu'est-ce qu'une proposition ?

Définition I.1.1 proposition

Une *proposition* est un énoncé qui est soit vrai soit faux.

Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan.*
On peut envisager les propositions, P : « ABCD est un carré » ;
Q : « ABCD est un parallélogramme ».
Suivant la nature du quadrilatère ABCD la proposition P, comme la proposition Q, est soit vraie, soit fausse.

I.2 Négation d'une proposition

Définition I.2.1

La négation d'une proposition P est la proposition, notée « non P » ou « $\overline{\mathrm{P}}$ » ou encore « $\neg$P », qui est fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

Exemples
1. *Reprenons les propositions de l'exemple précédent.*
On a, $\overline{P}$: « ABCD n'est pas un carré » ; $\overline{Q}$: « ABCD n'est pas un parallélogramme ».
2. *Soit n un nombre entier.*
La négation de T : « n est pair » ; est $\overline{T}$: « n n'est pas pair » ;
c'est-à-dire : « n est impair ».
3. *Soit x un nombre réel.*
La négation de R : « $x > 2$ » ; est , $\overline{R}$: « $x \leqslant 2$ ».
4. *La négation de S : « pour tout réel x : $0 \leqslant x^2$ » ; est $\overline{S}$: « il existe un réel x (au moins) tel que : $0 > x^2$ ».*

Remarques
1. *La négation de la négation d'une proposition P, c'est-à-dire $\overline{\overline{P}}$, est* synonyme *de la proposition P elle même. On écrit : $\overline{\overline{P}} \equiv P$.*
2. *Désignons par K l'intervalle $]2;+\infty[$ et par $\overline{K}$ le complémentaire de K dans $\mathbb{R}$; $\overline{K}$ est donc l'in-*

tervalle $]-\infty;2]$.
Les propositions R et $\overline{R}$ s'écrivent alors R : « $x \in K$ » ; et $\overline{R}$: « $x \in \overline{K}$ ».
En effet, les propositions « $x \notin K$ » et « $x \in \overline{K}$ » sont synonymes.

I.3 Le « et »

DÉFINITION I.3.1
Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P et Q) est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes deux vraies, et fausse dans le cas contraire.

Exemples
1. *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $1 < x$ » ; Q : « $x \leqslant 3$ ».*
P et Q est la proposition : « $1 < x$ et $x \leqslant 3$ » ; c'est-à-dire : « $1 < x \leqslant 3$ ».
2. *Considérons un quadrilatère ABCD et les propositions P : « ABCD a deux côtés perpendiculaires » ; Q : « ABCD est un parallélogramme ».*
On a, P et Q : « ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés perpendiculaires ».

Remarques
1. *Dans le premier exemple, si on désigne par I l'intervalle $]1;+\infty[$ et par J l'intervalle $]-\infty;3]$, P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in I$ » et « $x \in J$ ». La proposition (P et Q) s'écrit alors : « $x \in I \cap J$ ».*
En effet, les propositions « $x \in I$ et $x \in J$ » et « $x \in I \cap J$ » sont synonymes.
2. *La proposition P et Q est parfois notée : $P \wedge Q$.*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in \mathrm{A}$ » et Q : « $x \in \mathrm{B}$ ». La proposition $P \wedge Q$: « $x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$ » est synonyme de :« $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ »*

I.4 Le « ou »

Dans le langage courant, le mot « ou » a deux sens distincts : un sens exclusif comme dans l'affirmation « le menu propose fromage ou dessert », et un sens inclusif comme dans la phrase « Les Canadiens parlent l'anglais ou le français ». Dans le premier cas il signifie « soit fromage,soit dessert », dans le second cas il n'est pas exclu que certains Canadiens parlent les deux langues. C'est dans ce sens inclusif que « ou » est utilisé en mathématiques et en logique. Quand il est utilisé dans son sens exclusif, en général on le précise.

DÉFINITION I.4.1
Soit Q, P deux propositions.
La proposition (P ou Q) est la proposition qui est vraie lorsque l'une au moins des propositions Q, P est vraie, et fausse dans le cas contraire.

Exemple *Soit x un nombre réel, on considère les propositions P : « $x \leqslant 1$ » ; Q : « $3 < x$ ».*
P ou Q est la proposition : « $x \leqslant 1$ ou $3 < x$ ».

Remarques
1. *Reprenons les intervalles I et J introduits dans la remarque précédente.*
Les propositions P et Q s'écrivent respectivement : « $x \in \overline{I}$ » et « $x \in \overline{J}$ ».

La proposition (P ou Q) s'écrit alors : « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ ».
En effet, les propositions « $x \in \overline{I}$ ou $x \in \overline{J}$ » et « $x \in \overline{I} \cup \overline{J}$ » sont synonymes.
2. *La proposition P ou Q est parfois notée : $P \vee Q$*

Exemple *Soit A et B parties d'un univers Ω et x un élément de Ω. Considérons les propositions P : « $x \in \mathrm{A}$ » et Q : « $x \in \mathrm{B}$ ». La proposition $P \vee Q$: « $x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{B}$ » est synonyme de :« $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ »*

I.5 Propositions et parties d'un ensemble

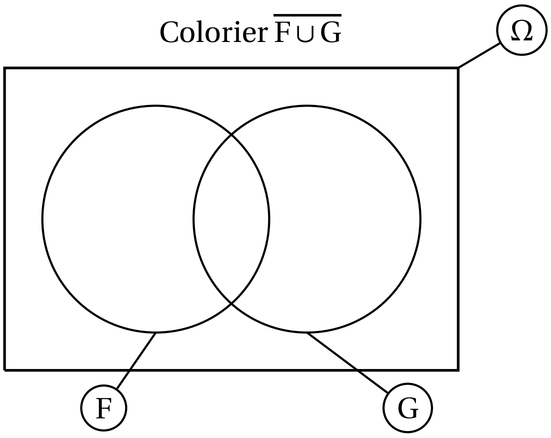
Nous avons constaté à travers les remarques précédentes et nous admettons que de façon générale :

- la négation est aux propositions ce que le complémentaire est aux parties d'un ensemble ;
- la conjonction (le « et ») est aux propositions ce que l'intersection est aux parties d'un ensemble ;
- la disjonction (le « ou ») est aux propositions ce que l'union est aux parties d'un ensemble.

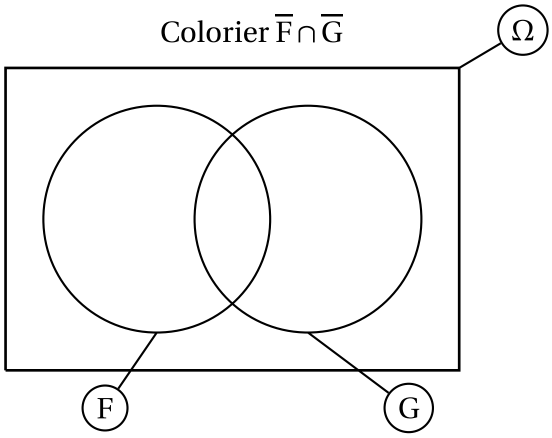
I.6 Lois de MORGAN

F et G désignent deux parties d'un ensemble Ω.

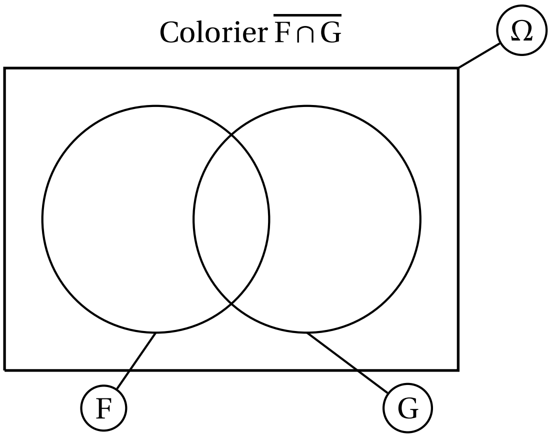
Colorier $\overline{\mathrm{F} \cup \mathrm{G}}$



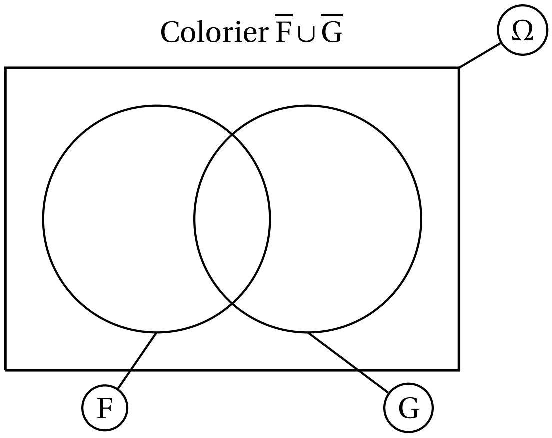
Colorier $\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{G}}$



Colorier $\overline{\mathrm{F} \cap \mathrm{G}}$



Colorier $\overline{\mathrm{F}} \cup \overline{\mathrm{G}}$



Soit Q, P deux propositions. Dire que la proposition (P ou Q) est fausse signifie que les propositions Q, P sont toutes deux fausses.
La proposition (non(P ou Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) et (non Q)).

$$\overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}}$$

De même, dire que la proposition (P et Q) est fausse signifie que l'une au moins des propositions Q, P est fausse.
La proposition (non(P et Q)) est donc synonyme de la proposition ((non P) ou (non Q)).

$$\overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} \equiv \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}}$$

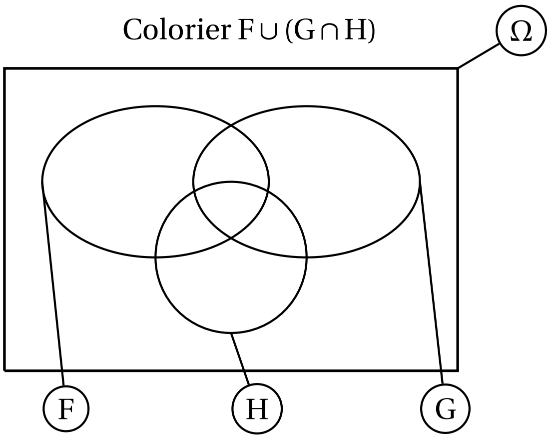
Exemples
1. *x désigne un nombre réel.*
La négation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ » est « $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».
La négation de « $0 < x$ ou $x \leqslant -1$ » est « $0 \geqslant x$ et $x > -1$ ».
2. *ABCD désigne un quadrilatère.*
La négation de « ABCD est un parallélogramme mais n'est pas un carré » est « ABCD est un carré ou n'est pas un parallélogramme».

Remarque *Les formules : $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$; $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$; $\overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$ et $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}$; sont appelées lois (ou formules) de Morgan*[1].

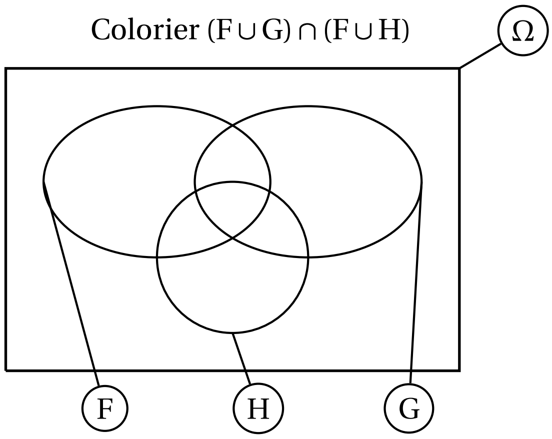
I.7 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soit Ω un ensemble. L'ensemble des parties de Ω est noté : $\mathscr{P}(\Omega)$.
F, G et H désignent trois éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$.

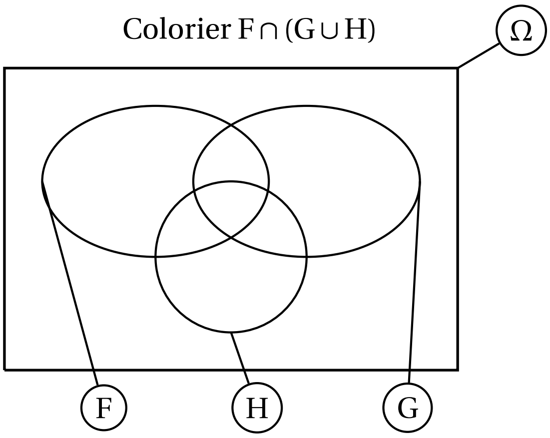
Colorier $\mathrm{F} \cup (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$



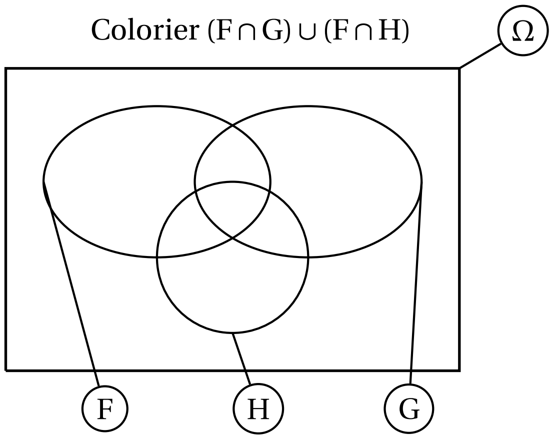
Colorier $(\mathrm{F} \cup \mathrm{G}) \cap (\mathrm{F} \cup \mathrm{H})$



Colorier $\mathrm{F} \cap (\mathrm{G} \cup \mathrm{H})$



Colorier $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \cup (\mathrm{F} \cap \mathrm{H})$



1. MORGAN (AUGUSTUS DE) *Inde 1806 - Londres 1871*, mathématicien et logicien britannique.

Théorème I.7.1
Soit Ω un ensemble. Pour tous éléments F, G, H de $\mathscr{P}(\Omega)$, on a :

$F \cap G = G \cap F$	$\cap$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup G = G \cup F$	$\cup$ est commutative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cap H) = (F \cap G) \cap H$	$\cap$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cup (G \cup H) = (F \cup G) \cup H$	$\cup$ est associative dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$;
$F \cup (G \cap H) = (F \cup G) \cap (F \cup H)$	dans $\mathscr{P}(\Omega)$ $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$;
$\Omega \cap F = F \cap \Omega = F$	Ω est élément neutre pour $\cap$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$;
$\emptyset \cup F = F \cup \emptyset = F$	$\emptyset$ est élément neutre pour $\cup$ dans $\mathscr{P}(\Omega)$.

Remarques
1. *Lorsque Ω est non vide, $\left(\mathscr{P}(\Omega), \cup\right)$ et $\left(\mathscr{P}(\Omega), \cap\right)$ ne sont pas des groupes car la plupart des éléments ne sont pas inversibles.*
Par exemple il n'existe pas d'élément Ω' dans $\mathscr{P}(\Omega)$ tel que : $\Omega \cup \Omega' = \emptyset$.
2. *L'associativité permet de légitimer des écritures telles que $F \cup G \cup H$ ou $F \cap G \cap H$.*

On peut réécrire le théorème précédent en remplaçant les parties de Ω par des propositions. On obtient alors le théorème suivant.

Théorème I.7.2
Soit P, Q, R trois propositions.
Les propositions (P et Q) et (Q et P) sont synonymes.
Les propositions (P ou Q) et (Q ou P) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q et R)) et ((P et Q) et R) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q ou R)) et ((P ou Q) ou R) sont synonymes.
Les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) sont synonymes.
Les propositions (P ou (Q et R)) et ((P ou Q) et (P ou R)) sont synonymes.

Remarques
1. *Pour démontrer les propriétés du théorème ci-dessus, on peut utiliser un tableau de vérité. Par exemple le tableau ci-dessous envisage dans les trois premières colonnes tous les cas possibles et on constate qu'a chaque fois les propositions (P et (Q ou R)) et ((P et Q) ou (P et R)) ont la même valeur, ce qui prouve qu'elles sont synonymes.*

P	Q	R	P et (Q ou R)	(P et Q) ou (P et R)
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

Table I.1 –

2. *Pour démontrer les propriétés du théorème I.7.1, on peut utiliser également un tableau de vérité. Par exemple la propriété $F \cap (G \cup H) = (F \cap G) \cup (F \cap H)$ signifie que pour tout élément x, les propositions $x \in F \cap (G \cup H)$ et $x \in (F \cap G) \cup (F \cap H)$ sont synonymes ; ce qui est démontré par le tableau de vérité suivant.*

$x \in F$	$x \in G$	$x \in H$	$x \in F \cap (G \cup H)$	$x \in (F \cap G) \cup (F \cap H)$
vrai	vrai	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	vrai	faux	faux
vrai	faux	vrai	vrai	vrai
faux	faux	vrai	faux	faux
vrai	vrai	faux	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux	faux
vrai	faux	faux	faux	faux
faux	faux	faux	faux	faux

TABLE I.2 –

I.8 Implications

I.8.1 Introduction

Considérons un quadrilatère ABCD, dans le plan, et les propositions P : « ABCD est un carré » et Q : « ABCD est un parallélogramme ». On sait que : « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme ». On dit que la proposition P implique la propositions Q ; on écrit : $P \Rightarrow Q$.

Lorsque $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une condition suffisante de Q (pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que ABCD soit un carré) ou que Q est une condition nécessaire de P (pour que ABCD soit un carré, il faut que ABCD soit un parallélogramme).

En logique, on déduit d'une proposition fausse n'importe qu'elle autre proposition, vraie ou fausse. Donc si la proposition P est fausse alors la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. Ainsi, $P \Rightarrow Q$ est synonyme de (Q ou non P).

Remarques

1. *Dans une argumentation une implication se reconnaît généralement à la structure « si ... alors ... », mais il arrive qu'elle soit moins reconnaissable. Ainsi on énonce parfois : « Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. »*
Cette phrase signifie : « Si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.»

2. *En mathématique, pour démontrer une proposition Q on démontre souvent une proposition du type : (P et ($P \Rightarrow Q$)). En pratique, ce type d'argumentation (appelée* modus ponens*) se traduit par une structure « P donc Q » qui signifie que l'on sait d'une part que P est vrai et d'autre part que $P \Rightarrow Q$.*

3. *Il existe une autre règle, appelée* modus tollens *qui permet de déduire $\overline{P}$ de $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } \overline{Q}\big)$.*
Le modus tollens *est à la base du raisonnement par l'absurde.*

I.8.2 Réciproque d'une implication

La réciproque de l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est l' implication « $Q \Rightarrow P$ » (ou « $P \Leftarrow Q$ »).

Exemples

1. *Considérons un quadrilatère ABCD.*
L'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est vraie et pourtant son implication réciproque, « si ABCD est un parallélogramme, alors ABCD est un carré », est fausse.

2. *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB. Le théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si le triangle ABC est rectangle en A, alors $a^2 = b^2 + c^2$ ».*

La réciproque du théorème de Pythagore peut s'énoncer ainsi : « si $a^2 = b^2 + c^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A ». Nous savons que la réciproque du théorème de Pythagore est vraie.

I.8.3 Contraposée d'une implication

La contraposée de l'implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » est l'implication « $\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}$ » (ou « $\overline{\mathrm{P}} \Leftarrow \overline{\mathrm{Q}}$ »).
Exemple *Considérons un quadrilatère ABCD.*
La contraposée de l'implication « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme » est l'implication « si ABCD n'est pas un parallélogramme, alors ABCD n'est pas un carré ».

Nous constatons que ces deux dernières implications sont vraies. Plus généralement, on a la propriété suivante.
THÉORÈME I.8.1
Deux implications contraposées sont synonymes.

Démonstration En effet : $(\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) \equiv \left(\mathrm{Q} \vee \overline{\mathrm{P}}\right) \equiv \left(\overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\left(\overline{\mathrm{Q}}\right)}\right) \equiv \left(\overline{\mathrm{Q}} \Rightarrow \overline{\mathrm{P}}\right)$. □

Exercice I.8.1. ***Soit n un nombre entier, démontrer que si n^2 est impair, alors n est impair.***
Solution *On sait que le produit de deux entiers pairs est pair. Donc, en particulier, si n est pair alors n^2 est pair ; donc, par contraposition, si n^2 n'est pas pair alors n n'est pas pair ; c'est-à-dire si n^2 est impair, alors n est impair.* □

I.8.4 Implication contraire

L'implication contraire de « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » est l'implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \overline{\mathrm{Q}}$ ».
Les propositions « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » et « $\mathrm{P} \Rightarrow \overline{\mathrm{Q}}$ » ne sont pas équivalentes et l'une n'est pas la négation de l'autre.

I.9 Double implication ou équivalence

Lorsqu'une implication « $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$ » et sa réciproque « $\mathrm{P} \Leftarrow \mathrm{Q}$ » sont toutes les deux vraies, on dit qu'on a une double implication. Les propositions P et Q sont dites équivalentes, ce qui se note : $\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}$.

Dans les propriétés et les raisonnements, les équivalences sont signalées par des expressions telles que « si et seulement si » ou « équivaut à ».
Exemple *Considérons un triangle ABC et désignons par a, b, c les distances respectives BC, AC, AB.*
Le théorème de Pythagore et sa réciproque peuvent être regroupés dans l'énoncé suivant :
« Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$. »

Remarques
1. *Lorsque la réciproque d'une implication est fausse, on n'a pas l'équivalence. Ainsi, en reprenant l'exemple du quadrilatère ABCD, l'énoncé « si ABCD est un carré, alors ABCD est un parallélogramme », en revanche l'énoncé « ABCD est un carré si et seulement si ABCD est un parallélogramme » est faux.*
2. *Si deux propositions sont équivalentes alors, par contraposition leurs négations sont équivalentes.*

Exemple *Soit x un nombre réel.*
On a : $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$;
donc, par contraposition : $|x| \geqslant 2 \Leftrightarrow x \leqslant -2$ ou $2 \leqslant x$.

I.10 Formules récapitulatives

Les principales propriétés évoquées dans cet exposé sont résumées par les formules suivantes.

$$\overline{\overline{\mathrm{P}}} \equiv \mathrm{P}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}} & \equiv & \overline{\mathrm{P}} \vee \overline{\mathrm{Q}} \\ \overline{\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}} & \equiv & \overline{\mathrm{P}} \wedge \overline{\mathrm{Q}} \end{array}\right\} \quad \text{(lois de Morgan)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{P} \wedge \mathrm{Q} & \equiv & \mathrm{Q} \wedge \mathrm{P} \\ \mathrm{P} \vee \mathrm{Q} & \equiv & \mathrm{Q} \vee \mathrm{P} \end{array}\right\} \quad \text{(commutativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \wedge \mathrm{R} \\ \mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \vee \mathrm{R} \end{array}\right\} \quad \text{(associativité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{P} \wedge (\mathrm{Q} \vee \mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \vee (\mathrm{P} \wedge \mathrm{R}) \\ \mathrm{P} \vee (\mathrm{Q} \wedge \mathrm{R}) & \equiv & (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q}) \wedge (\mathrm{P} \vee \mathrm{R}) \end{array}\right\} \quad \text{(distributivité)}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}) & \equiv & \left(\overline{\mathrm{P}} \Leftarrow \overline{\mathrm{Q}}\right) \\ (\mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{Q}) & \equiv & \left(\overline{\mathrm{P}} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{Q}}\right) \end{array}\right\} \quad \text{(contraposée)}$$

I.10.1 Exercices

I.10.a. Parmi les propositions suivantes certaines sont vraies et les autres sont fausses.
Démontrer succinctement les propositions vraies et trouver un contre-exemple pour les propositions fausses.
Pour tout réel x :

a. « si $0 < x < 10^{-4}$ alors $10^{-4} < \dfrac{1}{x}$ »

b. « si $0 < x < 10^3$ alors $\dfrac{1}{x} < 10$ ».

c. « si $x < 10$ alors $x^2 < 10^3$ ».

d. « si $10^{-4} < |x| < 10^{-3}$ alors $\left(\dfrac{1}{x} > 10^3 \text{ ou } \dfrac{1}{x} < 10^{-4}\right)$ ».

e. « si $|x| < 10^{-3}$ alors $x^2 < 10^{-3}$ ».

f. « si $3 \leqslant |x+2| \leqslant 5$ alors $x \leqslant 5$ ».

g. « si $3 \leqslant |x+2| \leqslant 5$ alors $4 \leqslant |x+3| \leqslant 6$ ».

h. « si $1 \leqslant |1-2x| \leqslant 3$ alors $x \in [-1;0] \cup [1;2]$ ».

I.11 Raisonnement par récurrence

Considérons les premiers entiers naturels non nuls et comparons la somme de leurs cubes au carré de leur somme.
On a :

$$\begin{array}{rcl} 1^3 = 1 & \text{et} & 1^2 = 1 \\ 1^3+2^3 = 9 & \text{et} & (1+2)^2 = 9 \\ 1^3+2^3+3^3 = 36 & \text{et} & (1+2+3)^2 = 36 \\ 1^3+2^3+3^3+4^3 = 100 & \text{et} & (1+2+3+4)^2 = 100 \end{array}$$

Cette étude nous amène à conjecturer que pour tout entier naturel non nul n, la proposition

$$\mathrm{P}_n : « 1^3+2^3+\cdots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 »$$

est vraie. Il est malheureusement impossible d'examiner la véracité de chacune de ces propositions. Pour démontrer ces propositions, nous allons utiliser une nouvelle méthode de raisonnement appelée *raisonnement par récurrence* dont le principe est le suivant : on vérifie que la première proposition est vraie et on démontre que chacune des propositions implique la proposition suivante ; on prouve ainsi, de proche en proche, que toutes les propositions sont vraies.

– D'après l'étude menée, P_1 est vraie.
– Supposons la proposition P_k vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$ (*hypothèse de récurrence*) ; c'est-à-dire :
 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1+2+\cdots+k)^2$; déduisons-en que la proposition P_{k+1} est vraie ; c'est-à-dire :
 $1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \big(1+2+\cdots+k+(k+1)\big)^2$;
 On a :

$$\begin{aligned}
1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= (1+2+\cdots+k)^2 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 && \text{(hypothèse de récurrence et développement)}\\
&= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + 2\frac{k(k+1)}{2}(k+1) + (k+1)^2 && \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)}\\
&= \left[\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)\right]^2 && \text{(identité remarquable)}\\
&= \big(1+2+\cdots+k+(k+1)\big)^2 && \text{(somme de termes d'une suite arithmétique)}
\end{aligned}$$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel non nul n :

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on procède en deux étapes :
– on vérifie que la proposition P_{n_0} est vraie
– on démontre, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0, que si P_k est vraie alors P_{k+1} est vraie.

Exercice I.11.1. ***Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9.***

Solution *Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition P_n : « $10^n - 1$ est multiple de 9 ».*
$10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 9 \times 0$ donc P_0 est vraie.
Soit k un entier naturel. Supposons que $10^k - 1$ soit multiple de 9, démontrons que $10^{k+1} - 1$ est multiple de 9.
$10^{k+1} - 1 = \underbrace{9 \times 10^k}_{\text{multiple de 9}} + \underbrace{10^k - 1}_{\text{multiple de 9 d'après l'hypothèse de récurrence}}$; donc $10^{k+1} - 1$, comme somme de multiples de 9, est multiple de 9.
D'où, par récurrence, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est multiple de 9. □

Exercice I.11.2. ***(Inégalité de Bernoulli)***
Démontrer que pour tout réel α vérifiant $\alpha \geqslant -1$ et pour tout entier naturel non nul n, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$.

Solution *Soit α un réel vérifiant $\alpha \geqslant -1$. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition B_n : « $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ ».*
Pour $n = 1$, on a : $(1+\alpha)^n = 1+\alpha$ et $1 + n\alpha = 1 + \alpha$; donc B_1 est vraie.
Soit k un entier naturel. Supposons que : $(1+\alpha)^n \geqslant 1+n\alpha$; démontrons que : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)\alpha$.
On a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ et $1+\alpha$ est positif, donc par produit : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha)$.
Or : $(1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2$ et $n\alpha^2 \geqslant 0$; donc : $(1+n\alpha)(1+\alpha) \geqslant 1 + (n+1)\alpha$; puis par transitivité : $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)\alpha$.
Donc par récurrence, pour tout entier naturel non nul n, on a : $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$. □

Remarques
1. *La première étape du raisonnement (vérifier que la première proposition est vraie) est essentielle. En considérant les propositions Q_n : « 10^n est multiple de 9 » ; on démontre comme dans l'exercice I.11.1. que pour tout k : $Q_k \Rightarrow Q_{k+1}$; et pourtant aucune des propositions Q_n n'est vraie.*
2. *Lorsqu'un raisonnement par récurrence est entrepris, l'expression « donc par récurrence » doit*

apparaître dans l'argumentation. Si de plus l'hypothèse de récurrence n'est pas utilisée, le raisonnement est alors faux.