COURS DE MATHÉMATIQUES

SIXIÈMES 5 PÉRIODES

Valère BONNET (valere.bonnet@eeb1.eu)

2 juin 2012

ÉCOLE EUROPÉENNE BRUXELLES I

Table des matières

Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Ce chapitre traite de fonctions numériques d'une variable réelle ; c'est-à-dire de fonctions qui à un nombre réel associe un nombre réel.

I.1 Ensemble de définition

I.1.1 Introduction

L'ensemble de définition d'une fonction est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des réels qui ont un image par cette fonction. Lorsque la fonction est notée, f ou g, l'ensemble de définition sera le plus souvent noté, D_f ou D_g. Cet ensemble peut être explicitement donné dans un énoncé comme dans, « considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $[-5;5]$ », une telle fonction f n'est pas définie en 6 bien que son expression soit calculable pour $x = 6$. Mais souvent l'ensemble de définition est implicite, par exemple l'expression de la fonction, $x \mapsto \frac{1}{x}$, n'est pas calculable uniquement pour, $x = 0$, on en déduit que l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}^\star$. Ainsi, en pratique, déterminer un ensemble de définition c'est déterminer les nombres réels pour lesquelles l'expression est calculable, ou déterminer les nombres réels pour lesquelles l'expression n'est pas calculable et en déduire l'ensemble de définition par passage au complémentaire.

I.1.2 Détermination pratique

Compte tenu des fonctions de référence actuellement connues, les fonctions dont l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$ sont des fonctions dont l'expression donnée présente un quotient où la variable apparaît au dénominateur ou un radical sous lequel la variable apparaît. Les polynômes ne sont pas de tels fonctions, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.1.1

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.

Exercice I.1.1. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_1 : x \mapsto \frac{2x+3}{x^2-4}$.***

Solution *Pour tous nombre réel, x, $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x^2 - 4$ n'est pas nul.*

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x-2)(x+2) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 2 \text{ ou } x = -2$$

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$$

□

Exercice I.1.2. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction*** $f_2 : x \mapsto 2x+3+\sqrt{-3x+2}$.

Solution *Pour tout nombre réel, x,* $f_2(x)$ *est défini si, et seulement si,* $-3x+2 \geqslant 0$.

$$-3x+2 \geqslant 0 \iff -3x \geqslant -2 \iff x \leqslant \frac{2}{3} \quad (\text{car } -3<0)$$

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_2} = \left]-\infty ; \frac{2}{3}\right]$$

□

Exercice I.1.3. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction*** $f_3 : x \mapsto \sqrt{-x^2+3x-2}$.

Solution *Pour tout nombre réel, x,* $f_3(x)$ *est défini si, et seulement si,* $-x^2+3x-2 \geqslant 0$.
1 est racine évidente du premier membre, on en déduit la factorisation : $-x^2+3x-2 = (x-1)(-x+2)$.

x		1		2	
$-x^2+3x-2$	−	0	+	0	−

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_3} = [1;2].$$

□

Exercice I.1.4. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction*** $f_4 : x \mapsto -x^2+3x-2$.

Solution f_4 *est une fonction polynôme, donc :*

$$\mathrm{D}_{f_4} = \mathbb{R}.$$

□

Remarque *L'ensemble de définition de la fonction,* $f : x \mapsto \dfrac{x(x+2)}{x+2}$ *est,* $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$*, et pour tout élément, x, de cet ensemble :* $f(x) = x$.
La détermination de l'ensemble de définition doit toujours précéder d'éventuelles simplifications.

I.1.3 Exercices

I.1.a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 3x^2-5x+7$.

I.1.b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \pi x - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.1.c. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

I.1.d. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 3-4\sqrt{x-2}$.

I.1.e. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 2+3\sqrt{-5x+4}$.

I.1.f. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

I.1.g. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-3}{(x-2)(4x-3)}$.

I.1.h. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x^2-5x-2}$.

I.1.i. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2}\sqrt{x^2-x-1}$.

I.1.j. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-4)}$.

I.2 Quelques fonctions de références

Un monôme ou fonction monôme est une expression ou une fonction de la forme ax^n ou $x \mapsto ax^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre a est appelé coefficient du monôme et le naturel n son degré. Ces deux nombres caractérisent le monôme.

Exemples

1. *πx est le monôme de degré 1 et de coefficient π.*
2. *-7 est le monôme de degré 0 et de coefficient -7.*
3. *$3x^{-1}$ et $2x^{\frac{1}{2}}$ ne sont pas des monômes car ni -1 ni $\frac{1}{2}$ ne sont sont des entiers naturels.*

DÉFINITION I.2.1

Un polynôme est une somme finie de monômes.

Notations et vocabulaire

1. *Dans une écriture réduite : $\mathrm{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (avec $a_n \neq 0$) ; le monôme de plus haut degré, ici $a_n x^n$, est appelé monôme dominant, son coefficient (ici a_n) est appelé coefficient dominant et son degré (ici n) est appelé degré du polynôme, on notera : $\deg \mathrm{P} = n$.*
2. *Le quotient de deux polynômes est appelé fonction rationnelle ou fraction rationnelle.*
3. *Le quotient de deux fonctions affines est appelé fonction homographique.*

Cas particuliers

1. Le polynôme nul est défini par : $\mathrm{P}(x) = 0$.
2. Les monômes sont des cas particuliers de polynômes.
3. Les fonctions affines sont des cas particuliers de polynômes.
4. Les fonctions affines sont des cas particuliers de fonctions homographiques.
5. Les fonctions homographiques et les polynômes sont des cas particuliers de fonction rationnelles.

Exemple *La fonction P définie par $\mathrm{P}(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ est un polynôme de degré 4, son coefficient dominant est 5 et son monôme dominant est $5x^4$.*

Remarques

1. *Un polynôme est toujours défini sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour tous polynômes P et Q : $\deg(\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = \deg \mathrm{P} + \deg \mathrm{Q}$.*

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.1

Deux polynômes f et g, distincts du polynôme nul, sont égaux si, et seulement si :

1. f et g ont le même degré ;
2. les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ de f et $b_0, \cdots, b_n$ de g vérifient pour tout $i \in [\![0;1]\!]$: $a_i = b_i$.

DÉFINITION I.2.2

Une racine d'un polynôme f est un nombre α tel que : $f(\alpha) = 0$.

Exemple *Considérons la fonction polynôme $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$; on a : $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$; donc 1 est racine de f.*

Remarques

1. *Certains polynômes n'ont pas de racine dans $\mathbb{R}$, comme par exemple $\mathrm{P}(x) = x^4 + x^2 + 1$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{P}(x) \geqslant 1$).*

2. *Si α est racine du produit $\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ de deux polynômes sans être racine de P, alors α est racine de Q.*

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.2 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit f un polynôme présentant une racine α.
Il existe un unique polynôme g tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=(x-\alpha)g(x)$.

Remarque $\deg g=(\deg f)-1$.

Exemple *1 est racine de $2x^3-5x^2+2x+1$ et on a : $2x^3-5x^2+2x+1=(x-1)\left(2x^2-3x-1\right)$.*

COROLLAIRE I.2.3

Un polynôme de degré n a au plus n racines.

Démonstration Sous forme factorisée un polynôme de degré n a au plus n facteurs de degré 1. D'après le théorème I.2.2 les racines d'un polynômes sont fournies par ses facteurs de degré 1. On en déduit le corollaire. □

Exercice I.2.1. ***1. 1 est-il racine du polynôme $\mathrm{P}: x\mapsto 2x^3+x^2-3$?***

2. Factoriser P(on fera apparaître un facteur de degré 1 et un facteur de degré 2).

Solution ***1.*** *On a : $\mathrm{P}(1)=2\times1^3+1^2-3=2+1-3=0$; donc :*

$$\boxed{\textbf{\textit{1 est racine de }}\mathbf{P}.}$$

2. *D'après le théorème fondamental de l'algèbre, on peut mettre $(x-1)$ en facteur dans l'expression de $\mathrm{P}(x)$:*

$$\begin{array}{r|l}
2x^3+x^2\quad\;\;-3 & x-1 \\ \cline{2-2}
3x^2\qquad\quad & 2x^2+3x+3 \\
3x-3 & \\
0 &
\end{array}$$

Pour tout réel x :

$$\boxed{\mathbf{P}(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\left(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\right)}.$$

□

Pour factoriser un polynôme, on peut reconnaître une racine, α, puis diviser l'expression de $\mathrm{P}(x)$ par $x-\alpha$.

Exercice I.2.2. ***Factoriser $\mathrm{P}: x\mapsto x^3-2x^2-x+2$ (une décomposition en trois facteurs de degré 1 est attendue).***

Solution $\mathrm{P}(x)=x^3-x-2x^2+2=x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)=(x-2)\left(x^2-1\right)=(x-2)(x-1)(x+1)$. □

Pour factoriser un polynôme, on peut regrouper des termes semblables puis reconnaître un facteur commun.

Exercice I.2.3. ***1. $\sqrt{2}$ est-il racine du polynôme $\mathrm{P}: x\mapsto 4x^4+12x^3+x^2-24x-18$?***

2. Factoriser P (une décomposition en quatre facteurs de degré 1 est attendue).

Solution ***1.*** $\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\right)=16+24\sqrt{2}+2-24\sqrt{2}-18=0$.

$$\boxed{\sqrt{\mathbf{2}}\textbf{\textit{ est racine de }}\mathbf{P}.}$$

2. *Pour tout réel x, on a :*

$$\mathrm{P}(x)=12x^3-24x+4x^4+x^2-18=12x\left(x^2-2\right)+\left(x^2-2\right)\left(4x^2+9\right)=\left(x^2-2\right)\left(4x^2+12x+9\right)$$

Soit finalement :

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)(2x+3)^2}.$$

□

Dans l'exercice I.2.3., dans le calcul de $\mathrm{P}\left(\sqrt{2}\right)$, on constate que les termes de degré pair sont entiers alors que les termes de degré impairs sont multiples de $\sqrt{2}$ on a donc l'idée, pour factoriser P, de regrouper les monômes suivant leur parité.

I.2.1 Travaux dirigés

I.2.1.a Décomposition d'une fonction rationnelle

On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{4x^3+5x^2-2x+3}{x^2+2}$. On se propose d'écrire f sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

(cette forme est plus avantageuse pour résoudre certains problèmes).
Pour venir à bout de cette question nous allons utiliser deux méthodes : l'identification des coefficients (méthode officielle) et la division de polynômes (méthode standard).

Partie A – Identification

1. Préciser l'ensemble de définition de f, D_f.
2. On se propose de déterminer quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f, \qquad f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2} \tag{P}$$

a. Démontrer que la proposition P est équivalente à :

$$\text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f, \qquad 4x^3+5x^2-2x+3 = (ax+b)\left(x^2+2\right) + cx + d \tag{P'}$$

b. En développant le second membre de la dernière égalité et en procédant par identification des coefficients, déterminer un système d'équations dont la solution est le quadruplet (a, b, c, d) cherché.

c. Résoudre le système obtenu en **A.2.c.** et conclure.

3. Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

Partie B – Division

Effectuons la division euclidienne des polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+5x^2\ -\ 2x+3 & x^2+2 \\ \cline{2-2} 5x^2-10x\quad & 4x+\dfrac{1}{2} \\ -10x+2 & \end{array}$$

On a donc, pour tout réel x :

$$4x^3+5x^2-2x+3 = \left(x^2+2\right)\left(4x+\frac{1}{2}\right) - 10x + 2.$$

D'où l'on tire que pour tout réel x :

$$f(x) = 4x + \frac{1}{2} + \frac{-10x+2}{x^2+2}.$$

Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

Partie C – Utilisation du théorème fondamental de l'algèbre

On considère le polynôme :

$$\mathrm{P}(x) = 2\,x^3 - 7\,x^2 + 7\,x - 2.$$

1. Calculer $\mathrm{P}(1)$ et en déduire une factorisation de $\mathrm{P}(x)$ par un polynôme de degré 1.

2. Calculer $\mathrm{P}(2)$ et en déduire une décomposition de $\mathrm{P}(x)$ en trois facteurs de degré 1.

I.2.2 Exercices

I.2.a. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + \sin^2 x + \cos^2 x$ est-elle un polynôme ?

I.2.b. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + 3x^{-1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.c. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 + 4x^{\frac{1}{2}}$ est-elle un polynôme ?

I.2.d. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.e. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.f. 1 est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$?

I.2.g. -2 est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$?

I.2.h. $\sqrt{3}$ est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 3$?

I.2.i. Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$.

I.2.j. Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 9x - 3$.
(on devra obtenir quatre facteurs de degré 1).

I.3 Opérations sur les fonctions et variations d'une fonction

I.3.1 Égalité de deux fonctions

Une fonction est déterminée par son ensemble de définition et par le mécanisme qui à chaque élément associe son image par la fonction. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.3.1

Soit f et g deux fonctions d'ensembles de définitions respectifs D_f et D_g.
Les fonctions f et g sont égales si, et seulement si :

$$\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g \qquad \text{et,} \qquad \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f, \quad f(x) = g(x).$$

Remarque *En particulier deux fonctions sont égales si, et seulement si, leurs représentations graphiques relativement à un repère donné sont confondues.*

Exercice I.3.1. ***Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.***

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} \qquad \textit{et} \qquad g(x) = 2 - \frac{1}{x+2}$$

Solution

1. *Pour tout réel x, $f(x)$ et $g(x)$ ne sont définis que lorsque $x \neq -2$, on en déduit que f et g ont le même ensemble de définition :* $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. *Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on a :*

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = 2 - \frac{1}{x+2} = g(x).$$

Donc : $f = g$. □

I.3.2 Opérations sur les fonctions

f et g sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition D.

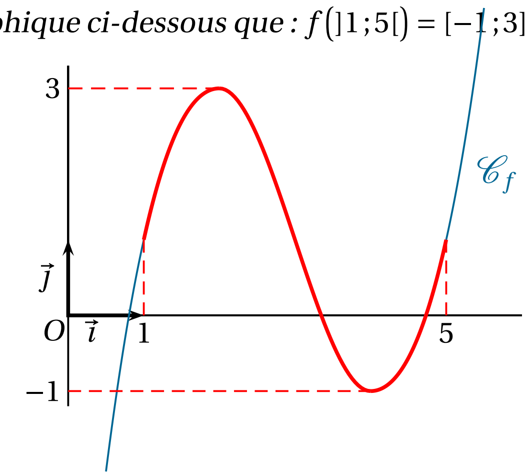
Opération	Notation	Fonction définie, pour tout $x \in$ D, par :
Produit par un réel λ	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Somme de fonctions	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Combinaison linéaire (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)	$\alpha f + \beta g$	$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \times f(x) + \beta \times g(x)$
Inverse d'une fonction (lorsque f ne s'annule pas sur D)	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
Quotient de deux fonctions (lorsque g ne s'annule pas sur D)	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

I.3.3 Compositions de fonctions

Soit f une fonction et I un sous-ensemble de son ensemble de définition, on désignera par $f(\mathrm{I})$ l'ensemble décrit par $f(x)$ lorsque x décrit I :

$$f(\mathrm{I}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{I}\}.$$

Exemple *On lit sur le graphique ci-dessous que : $f(]1;5[) = [-1;3]$.*



DÉFINITION I.3.1 **COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS**

Soit f une fontion définie sur un ensemble I et g une fontion définie sur un ensemble J tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On appelle fonction composée de f par g (ou composée des fonctions f et g) la fonction, notée $g \circ f$, définie sur I par :

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Remarque *La construction de l'image d'un réel x par $g\circ f$ respecte le schéma ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{g\circ f}"'] & y=f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(y)=g\big(f(x)\big)=g\circ f(x)
\end{tikzcd}$$

Exercice I.3.2. ***On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x-3$ et $g : x \mapsto x^2+1$.***
Déterminer $g\circ f$ et $f\circ g$.

Solution *f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $g\circ f$ et $f\circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :*

$$g\circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-3) = (2x-3)^2+1 = 4x^2-12x+10.$$

$$f\circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(x^2+1\right) = 2\left(x^2+1\right)+3 = 2x^2+5.$$

□

Remarque *Généralement : $g\circ f \neq f\circ g$.*

I.3.4 Sens de variation

I.3.4.a Rappels

Les définitions suivantes ont été vues dans les classes de précédentes.

DÉFINITIONS I.3.2

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

(1) On dit que f est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a :

$$a<b \quad\Longrightarrow\quad f(a)<f(b).$$

(2) On dit que f est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a :

$$a<b \quad\Longrightarrow\quad f(b)<f(a).$$

(3) On dit que f est *strictement monotone* sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Remarques

1. *Dire que f est strictement croissante sur I signifie que sur cet intervalle f conserve l'ordre.*
2. *Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que sur cet intervalle f inverse l'ordre.*
3. *On définit de même une fonction* croissante *(respectivement* décroissante *) sur un intervalle I en remplaçant l'implication par : $a \leqslant b \quad\Longrightarrow\quad f(a)\leqslant f(b)$ (respectivement : $a\leqslant b \quad\Longrightarrow\quad f(a)\geqslant f(b)$).*
4. *On définit de même une fonction* monotone *sur un intervalle I.*
5. *Toute fonction strictement croissante sur I est en particulier croissante sur I. La condition « strictement croissante » (respectivement « strictement décroissante »)est plus forte que la condition « croissante » (respectivement « décroissante »).*

6. *Les fonctions constantes sur un intervalle sont à la fois croissantes et décroissantes sur cet intervalle mais ne sont ni strictement croissantes, ni strictement décroissantes sur cet intervalle.*

THÉORÈME I.3.2

(1) Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments a et b de I :

$$a < b \iff f(a) < f(b).$$

(2) Soit f une fonction strictement décroissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments a et b de I :

$$a < b \iff f(b) < f(a).$$

Démonstration

(1) Soit a et b deux éléments de I. D'après la définition I.3.2 : $a < b \implies f(b) < f(a)$.
Réciproquement, f une fonction strictement croissante sur I, elle est donc croissante sur I, d'où il vient :
$a \geqslant b \implies f(a) \geqslant f(b)$;
Nous en déduisons par contraposition : $a < b \impliedby f(a) < f(b)$; ce qui achève la démonstration de la propriété.
On démontre de même la propriété **(2)**. □

DÉFINITION I.3.3

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles maximaux sur lesquelles la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

I.3.4.b Sens de variation et composition

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans son ensemble de définition et g une fonction dont l'ensemble de définition contient $f(\mathrm{I})$.
Si f est strictement décroissante sur I et g strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ inversera successivement deux fois l'ordre sur I ; on en déduit que $g \circ f$ est strictement croissante sur I.
Plus généralement on a le théorème suivant :

THÉORÈME I.3.3

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I et si g est une fonction strictement monotone sur $f(\mathrm{I})$, alors $g \circ f$ est une fonction strictement monotone sur un intervalle I ; plus précisément, le sens de variation de $g \circ f$ est donné dans le tableau ci-dessous.

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
g est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$	$g \circ f$ est strictement croissante sur I	$g \circ f$ est strictement décroissante sur I
g est strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$	$g \circ f$ est strictement décroissante sur I	$g \circ f$ est strictement croissante sur I

Remarques

1. *Si g est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ a le même sens de variation que f sur I.*

2. *Si g est strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ a le sens de variation contraire de celui de f sur I.*

3. *Le théorème I.3.3 reste vrai si on remplace « strictement monotone » par « monotone ».*

I.3.4.c Sens de variation et opérations

THÉORÈME I.3.4

Soit f et g deux fonctions, I un intervalle inclus dans leur ensemble de définition et k un nombre réel.

(1) Si $k > 0$, alors kf a le même sens de variation que f sur I.

(2) Si $k < 0$, alors kf a le sens de variation contraire de celui de f sur I.

(3) Si f et g sont strictement croissantes sur I, alors $f + g$ est strictement croissante sur I.

(4) Si f et g sont strictement décroissantes sur I, alors $f + g$ est strictement décroissante sur I.

Démonstration

(1) Si $k > 0$, alors kf est la composée de f par $x \mapsto kx$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc kf a le même sens de variation que f sur I.

(2) Si $k < 0$, alors kf est la composée de f par $x \mapsto kx$, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc kf a le sens de variation contraire de celui de f sur I.

(3) Soit a et b deux éléments de I.

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a) < f(b) \\ g(a) < g(b) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$$

(4) Soit a et b deux éléments de I.

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(a) > f(b) \\ g(a) > g(b) \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad f(a) + g(a) > f(b) + g(b)$$

□

Remarque *Dans les propriétés (3) et (4), lorsque f et g n'ont pas le même sens de variation, on ne peut rien conclure (voir exercice I.3.j.)*

I.3.5 Exercices

I.3.a. **1.** Développer : $(x-3)(x-1)$.

2. Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 3}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-1}$

I.3.b. Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2}$ et

$g(x) = 3 - \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

I.3.c. Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x}{x}$ et $g : x \mapsto x + 1$ sont-elles égales ?

I.3.d. Les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont-elles égales ?

I.3.e. On considère les fonctions
$f : x \mapsto 2x - 3$ et $g : x \mapsto -3x + 7$.
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

I.3.f. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto -3x^2 + 7x$.
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

I.3.g. On considère les fonctions affines
$f : x \mapsto 2x - 3$ et $\mathrm{I}d : x \mapsto x$.
Déterminer une fonction affine g telle que : $g \circ f = \mathrm{I}d$.
A-t-on : $f \circ g = \mathrm{I}d$?

I.3.h. Une fonction constante sur un intervalle I est-elle croissante sur cet intervalle ?

I.3.i. Soit f une fonction décroissante sur un intervalle I. Démontrer que pour tous éléments a et b de I, on a : $f(a) > f(b) \Longrightarrow a < b$.

I.3.j. **1.** Donner un exemple d'une fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f + g$ soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple d'une fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f+g$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Conclure.

I.3.k. On rappelle que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle considéré.

a. $f(x) = \sqrt{x}+2x-1$ sur $[0;+\infty[$.
b. $f(x) = \sqrt{x}-1$ sur $[0;+\infty[$.
c. $f(x) = x-2\sqrt{x}+1$ sur $[1;+\infty[$.
d. $f(x) = -3\sqrt{x}+2$ sur $[0;+\infty[$.

I.4 Parité, périodicité

Désormais, dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I.4.1 Symétrie d'une partie de $\mathbb{R}$ par rapport à 0

DÉFINITION I.4.1

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, on dit que E est symétrique par rapport à 0 lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in \mathrm{E} \Longrightarrow -x \in \mathrm{E}.$$

Exemples

1. $[-3;+\infty[$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $4 \in [-3;+\infty[$ *et pourtant* $-4 \notin [-3;+\infty[$.

2. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $1 \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ *et* $-1 \notin \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

3. $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ *est symétrique par rapport à 0.*

I.4.2 Fonctions paires, fonctions impaires

DÉFINITIONS I.4.2

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.

(1) La fonction f est dite paire lorsque : $\begin{cases} \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : \quad f(-x) = f(x) \end{cases}$.

(2) La fonction f est dite impaire lorsque : $\begin{cases} \mathrm{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in \mathrm{D}_f : \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Interprétation graphique Les fonctions paires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (noté Oy) et les fonctions impaires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

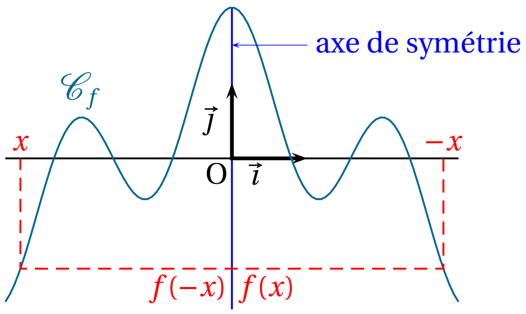


FIGURE I.1 – Fonction paire.

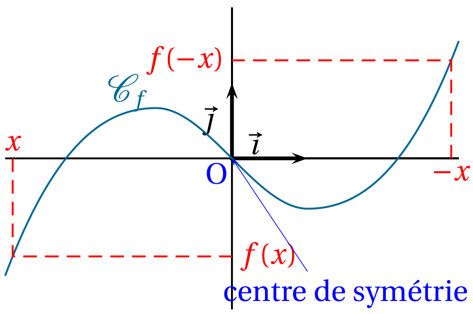


FIGURE I.2 – Fonction impaire.

Remarques

1. *Généralement une fonction n'est ni paire ni impaire. Le fait d'être paire ou impaire, pour une fonction, est une propriété remarquable.*

2. *Lorsqu'une fonction est paire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

3. *Lorsqu'une fonction est impaire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'origine du repère.*

Exercice I.4.1. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$.

Solution *La fonction f est définie en -4, mais pas en 4, donc :*

$$\boxed{\textit{la fonction } f \textit{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

□

M Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit (lorsque cela est possible) d'illustrer par un contre-exemple le fait que l'ensemble de définition n'est pas symmétrique par rapport à 0.

Exercice I.4.2. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto x^2 + x$.

Solution *On a : $f(1) = 2$ et $f(-1) = 0$. $f(1)$ et $f(-1)$ ne sont ni égaux ni opposés, donc :*

$$\boxed{\textit{la fonction } f \textit{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

□

M Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de choisir un nombre et son opposé dont les images ne sont ni égales ni opposées.

Exercice I.4.3. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2}$.

Solution *f est une fonction polynôme, elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.*

Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$:

$$f(-x) = 5(-x)^4 - 4(-x)^2 + \sqrt{2} = 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2} = f(x).$$

$$\boxed{\textit{la fonction } f \textit{ est paire.}}$$

□

M Pour démontrer qu'une fonction est paire ou impaire il suffit, après s'être assuré que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, d'exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice I.4.4. ***Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2-2}$.***

Solution *On a :* $x^2-2=0 \iff x=\sqrt{2}$ *ou* $x=-\sqrt{2}$.
Donc : $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$ *;* D_f *est donc symétrique par rapport à 0.*
Pour tout $x\in D_f$ *:*

$$f(-x)=\frac{4(-x)}{(-x)^2-2}=\frac{-4x}{x^2-2}=-\frac{4x}{x^2-2}=-f(x).$$

$$\boxed{\textit{la fonction } f \textit{ est impaire.}}$$

□

I.4.3 Fonctions périodiques

DÉFINITION I.4.3

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et p un nombre réel.
La fonction f est dite périodique de période p lorsque :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x\in\mathbb{R} : & x\in D_f \iff x+p\in D_f \\ \text{pour tout } x\in D_f : & f(x+p)=f(x) \end{cases}.$$

Interprétation graphique Les fonctions périodiques de période p sont les fonctions dont la représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteurs $p\vec{\imath}$.

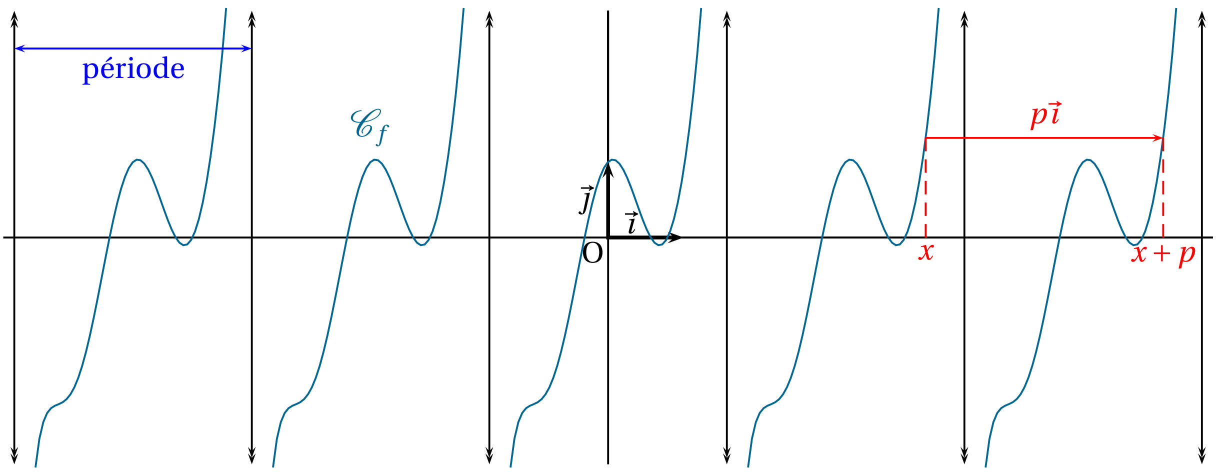


FIGURE I.3 – Fonction périodique de période p.

Remarques
1. *Pour exprimer qu'une fonction f est périodique de période p, on dira souvent qu'elle est p-périodique.*
2. *Si f est p-périodique et si $k\in\mathbb{Z}$ alors :*

$$\begin{cases} \textit{pour tout } x\in\mathbb{R} : & x\in D_f \iff x+kp\in D_f \\ \textit{pour tout } x\in D_f : & f(x+kp)=f(x) \end{cases}.$$

3. *Si p est une période de f alors les nombres de la forme kp (avec $k\in\mathbb{Z}$) sont aussi des périodes* *de f.*

4. *En pratique, lorsqu'on affirmera qu'une fonction f est p-périodique, p sera la plus petite période strictement positive de f. Les périodes de f seront alors les multiples de p, c'est-à-dire les nombres de la forme kp (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

Le théorème suivant a été vu dans les classes précédentes.

Théorème I.4.1

(1) Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.

(2) La fonction tan est π-périodique.

Exercice I.4.5. ***Soit f une fonction p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction g définie par : $g(x) = f(2x)$.***

Solution *Pour tout x tel que $2x \in D_f$: $g(x) = f(2x) = f(2x+p) = f\left(2\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) = g\left(x+\frac{p}{2}\right)$.*

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in D_g \iff 2x \in D_f \iff 2x+p \in D_f \iff 2\left(x+\frac{p}{2}\right) \in D_f \iff x+\frac{p}{2} \in D_g.$$

$$\boxed{\textbf{\textit{g est } }\frac{p}{2}\textbf{\textit{-périodique.}}}$$

□

Exercice I.4.6. ***Étudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)$.***

Solution *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right) = 50\sin(6x+\frac{\pi}{4}+2\pi) = 50\sin\left(6\left(x+\frac{2\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right) = f\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{\textbf{\textit{f est } }\frac{\pi}{3}\textbf{\textit{-périodique.}}}$$

□

I.4.4 Exercices

I.4.a. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

I.4.b. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 2x+4$.

I.4.c. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 3x^2-7$.

I.4.d. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-7}{x^2+1}$.

I.4.e. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions i et p définies par :

$$i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

1. Exprimer $p+i$ en fonction de f.

2. Étudier la parité des fonctions i et p.

3. Expliciter les fonctions i et p dans le cas où la fonction f est définie par : $f(x) = 2x^3-7x^2+5x-4$.

4. Expliciter les fonctions i et p dans le cas où la fonction f est définie par : $f(x) = \sqrt{3}x^7+6x^6-\pi x^5+5x^4+10x^3-103x+1000$.

I.4.f. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de fg dans chacun des cas suivants.

a. f et g sont paires.

b. f et g sont impaires.

c. f est paire et g est impaire.

d. f est impaire et g est paire.

I.4.g. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $f \circ g$ dans chacun des cas suivants.

a. f et g sont paires.

b. f et g sont impaires.

c. f est paire et g est impaire.

d. f est impaire et g est paire.

I.4.h. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et α, β deux nombres réels.

a. Démontrer que si f et g sont paires, alors $\alpha f + \beta g$ est paire.

b. Démontrer que si f et g sont impaires, alors $\alpha f + \beta g$ est impaire.

I.4.i. Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction g définie par : $g(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$.

I.4.j. Une fonction f est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \mapsto f(5x)$.

I.4.k. Une fonction f est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \mapsto 7f(5x+3)$.

I.4.l. Déterminer ω pour que la fonction $u : t \mapsto 220\sin(\omega t)$ soit périodique de période $\frac{1}{50}$.

I.4.m. f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. f est 4-périodique et g est 10-périodique. Déterminer la période de $2f + 3g$.

I.4.n. Désignons par E la fonction partie entière ; pour tout nombre réel x, $\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est donc l'unique entier vérifiant : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

1. Donner la partie entière de π, 6, -7 et de $-7,5$.

2. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x) + 1$

3. On considère la fonction m définie par : $m(x) = x - \mathrm{E}(x)$.
Démontrer que m est 1-périodique.

4. Représenter graphiquement les fonctions E et m. (unité graphique : 1 cm)

I.5 Vocabulaire de l'ordre

Considérons une partie non vide, E, de $\mathbb{R}$, par exemple : $\mathrm{E} =]-3;0] \cup \{2\}$;
On a pour tout $x \in \mathrm{E}$: $2,5 \geqslant x$; on dit que 2,5 est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que 2,5 est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathrm{E}$: $-4 \leqslant x$; on dit que -4 est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que -4 est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est -3.

On dira que $f \leqslant \lambda$ sur un intervalle I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$: $f(x) \leqslant \lambda$.
On dira alors que la fonction f est majorée par λ sur I.
Exemple *Considérons la fonction $f : x \mapsto 2 - x^2$. Un carré est toujours positif, donc : $f \leqslant 2$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.*

Plus généralement, on adapte ainsi aux fonctions tous le vocabulaire introduit ci-dessus pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice I.5.1. ***On considère la fonction $f : x \mapsto -2x+3$ et l'intervalle $\mathrm{I} = [7;10[$. Préciser les bornes de $f(\mathrm{I})$. Sont-elles atteintes ?***

Solution *On a : $-2 < 0$; donc f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*
$x \in \mathrm{I} \iff 7 \leqslant x < 10 \iff f(7) \geqslant f(x) > f(10) \iff -17 < f(x) \leqslant -11.$
Donc : $f(\mathrm{I}) =]-17;-11]$.

Les bornes inférieure et supérieure de f sur I sont respectivement -17 et -11.
La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.

Autre méthode *On a : $-2 < 0$; donc f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de variation suivant.*

x	$-\infty$	7	10	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-11	-17	$-\infty$

Donc : $f\big([7;10[\big) =]-17;-11]$.

Les bornes inférieure et supérieure de f sur I sont respectivement -17 et -11.
La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.

□

Pour déterminer l'mage d'un intervalle par une fonction, la lecture d'un tableau de variation bien dressé est souvent la méthode la plus simple.
Un tableau de variation à valeur de démonstration.

I.5.1 Exercices

I.5.a. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il borné ?

I.5.b. On pose $E = [-2;-1[\cup[1;2[$.

1. E est-il minoré ? majoré ? si oui préciser un minorant, un majorant.

2. E est-il borné ? si oui préciser ses bornes.

3. E a-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? si oui préciser lesquels.

I.5.c. Donner un exemple d'ensemble borné qui n'a ni plus grand élément ni plus petit élément.

I.5.d. Soit E un ensemble qui a un plus grand élément, S. S est-il un majorant de E ?
Démontrer que S est la borne supérieure de E.

I.6 Rappels sur les trinôme du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $P(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $P(x)$, résoudre l'équation $P(x) = 0$, étudier le signe $P(x)$ suivant les valeurs de x, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

I.6.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $P(x) = ax^2+bx+c$; on écrit $P(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $P(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $P(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $P(x)$ est : $P(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

étapes	cas particulier	cas général
1.	$P(x)=3x^2+5x-7$	$P(x)=ax^2+bx+c$
	$P(x)=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
2.	$P(x)=3\left(x^2+2\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{84}{36}\right]$	$P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$	
3.	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$	$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$
	$P(x)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{109}}{6}\right)$	
	$P(x)=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$	

Récapitulatif des étapes

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise ; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteurs de degré un à coefficient réels.

DÉFINITION I.6.1

Le nombre, Δ, défini par : $\Delta = b^2-4ac$; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{I.1}$$

I.6.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.
D'après (I.1), pour tout réel x :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \tag{I.2}$$

Introduisons la fonction $u : x \mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (I.2) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2a}\\-\frac{\Delta}{4a}\end{pmatrix}$.

Théorème I.6.1

La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à $\mathrm{O}y$ et de sommet $\mathrm{S}\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$; de plus, dans le repère $\left(\mathrm{S}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $\mathrm{Y} = a\mathrm{X}^2$.

Remarque *D'après* (I.2) *on a :* $\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $\mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Exemple *On se propose de représenter graphiquement la fonction f définie par :* $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
On a : $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{5}{2}$ *et* $f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{25}{4} - \dfrac{5}{2} + 4 = \dfrac{16}{4} - \dfrac{25}{4} = -\dfrac{9}{4}$.
Introduisons le point $\mathrm{S}\left(\dfrac{5}{2}; -\dfrac{9}{4}\right)$*, dans le repère* $\left(\mathrm{S}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2$.
Nous en déduisons la courbe de la figure I.4.

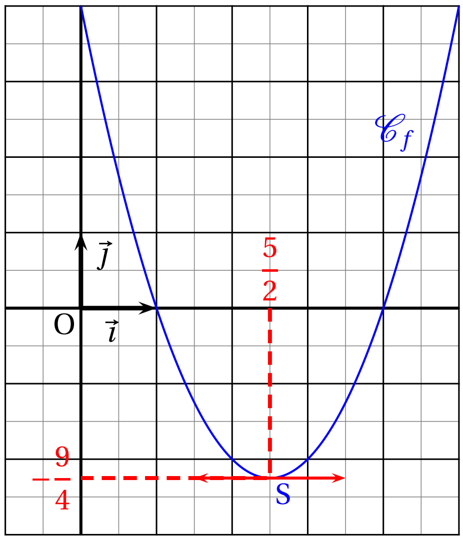


Figure I.4 – Représentation graphique de f.

On déduit du théorème I.6.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de a.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

Figure I.5 – Lorsque $a > 0$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Figure I.6 – Lorsque $a < 0$.

I.6.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (I.1) dans le cas où : $\Delta > 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME I.6.2

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Si $\Delta = 0$ P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x-x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

Remarques

1. *Si on remplace Δ par 0 dans les formules de calcul de x_1 et x_2, on obtient : $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = x_0$.*

2. *Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

3. *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

4. *Le théorème I.6.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré, P, que pour résoudre l'équation, $\mathrm{P}(x) = 0$ (voir corollaire I.6.3).*

Exercice I.6.1. ***Factoriser lorsque cela est possible.***

a. $\mathrm{P}(x) = 2x^2+3x-6$.

b. $\mathrm{P}(x) = 2x^2-8x+8$.

c. $\mathrm{P}(x) = 2x^2-5x+8$.

d. $\mathrm{P}(x) = -5x^2+3x+2$.

Solution

a. *On a : $\Delta = 3^2-4\times 2\times(-6) = 57$; donc $\Delta > 0$ et P a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x - \frac{-3-\sqrt{57}}{4}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{57}}{4}\right)}.$$

b. Méthode des identités $\boxed{\mathbf{P}(x) = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = 2(x-2)^2}$.

Méthode du discriminant *On a :* $\Delta = (-8)^2 - 4\times 2\times 8 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P *a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2(x-2)^2}.$$

c. *On a :* $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times (8) = 39$ *; donc* $\Delta < 0$.

P n'est pas factorisable.

d. Méthode de la racine évidente *On voit que* 1 *est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = (x-1)(-5x-2)}.$$

Méthode du discriminant *On a :* $\Delta = 3^2 - 4\times(-5)\times 2 = 49 = 7^2$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-7}{-10} = 1 \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right)}.$$

□

COROLLAIRE I.6.3

Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice I.6.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$.***

a. $\mathbf{3x^2 + 5x - 7 = 0}$.

b. $3x^2 - 5x - 2 = 0$.

c. $3x^2 + 5x + 7 = 0$.

d. $-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = 0$.

Solution **a.** *On a :* $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-7) = 109$ *; donc* $\Delta > 0$*, l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{109}}{6} \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{109}}{6}, \frac{-5 + \sqrt{109}}{6} \right\}}.$$

b. Méthode de la racine évidente *On voit que* 2 *est racine évidente, donc pour tout réel* x *:*

$$3x^2 - 5x - 2 = (x - 2)(3x + 1).$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ 2 ; -\frac{1}{3} \right\}}.$$

c. *On a :* $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 7 = -59$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\mathbf{S} = \emptyset}.$$

d. Méthode des identités

$$-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = -5\left(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}}.$$

Méthode du discriminant *On a :* $\Delta = 16 - 4 \times (-5) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$ *; donc* $\Delta = 0$*, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \frac{2}{5} \right\}}.$$

□

I.6.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x. On a vu en I.6.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
a			signe de a		
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{P}(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (I.1) : $\mathrm{P}(x) = a \underbrace{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$; donc P est du signe de a.

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME I.6.4

Soit $\mathrm{P} : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P(x) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$ P(x) est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ P(x) est du signe de a.

Exercice I.6.3. ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

a. $\mathbf{P_1 : x \longmapsto -2x^2 + 3x + 4.}$

b. $\mathbf{P_2 : x \longmapsto 3x^2 + 3x + 4.}$

c. $\mathbf{P_3 : x \longmapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}.}$

Solution **a.** *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P_1 *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{-4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{-4}.$$

On en déduit que le signe de P_1 *est donné par le tableau suivant.*

x		$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{4}$	
$\mathrm{P}_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. *On a :* $\Delta = 9 - 48 = -39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\mathbf{P_2 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.}}$$

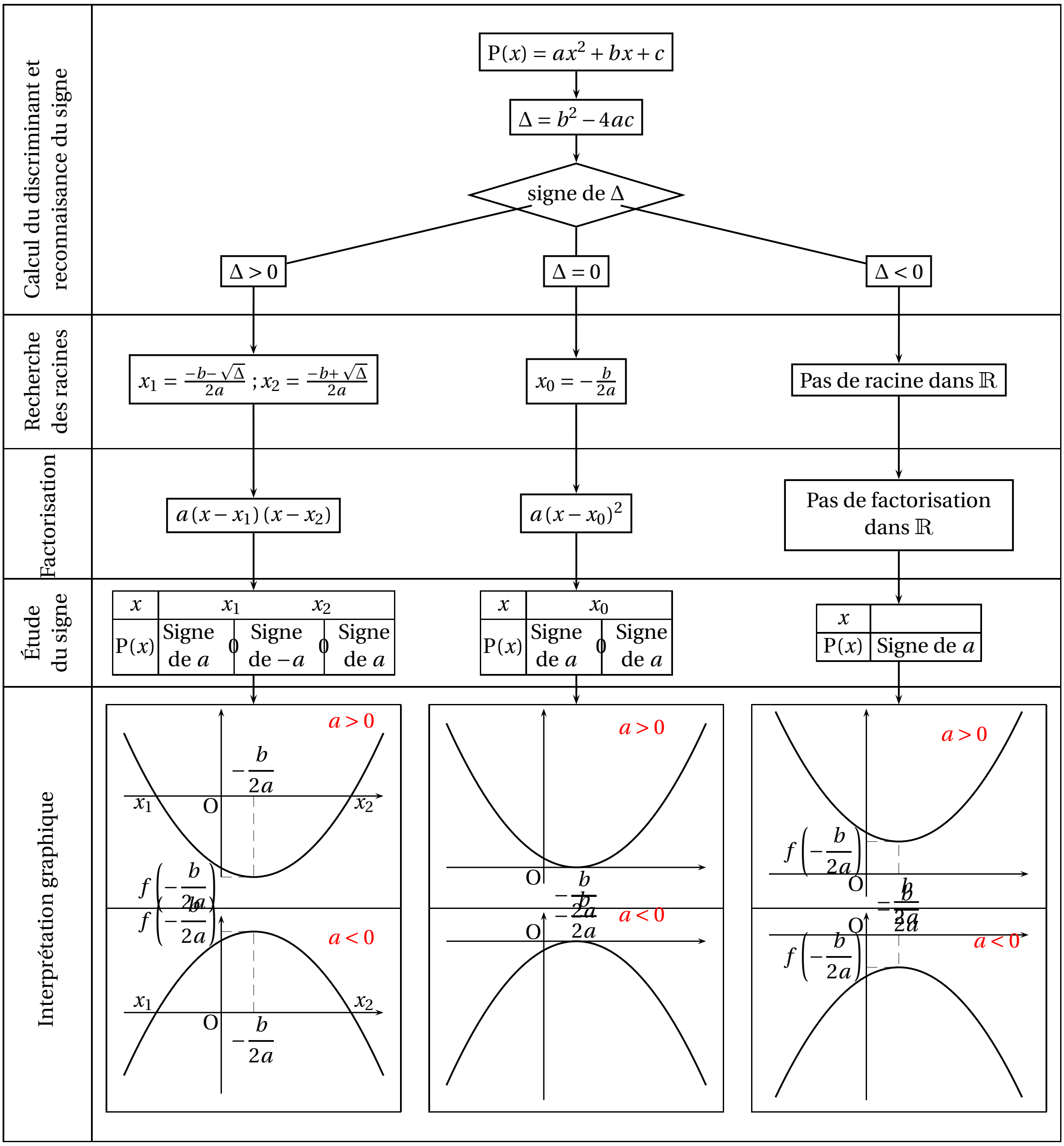
c. *On a :* $\Delta = 4 - 4 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P_3 *a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{P_2 \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } P_2 \text{ est s'annule seulement en } \frac{2}{5}.}}$$

□

I.6.5 Tableau récapitulatif



I.6.6 Travaux dirigés

I.6.6.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme $\mathrm{P} : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

Partie A – avec le discriminant

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $\mathrm{X} = x^2$).

1. $P_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.

2. $P_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.

3. $P_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.

4. $P_4 : x \mapsto x^4 + 16$.

5. $P_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.

6. $P_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

Partie B – sans le discriminant

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

I.6.6.b Équations en somme et produit

1. Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de a, b et c la somme et produit des racines.

2. Soit α et β deux nombres dont on connaît la somme, s et le produit, p.
Démontrer que α et β sont les racines du polynôme : $P : x \mapsto x^2 - sx + p$.

3. Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

I.6.7 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

I.6.a. Écrire $P : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

I.6.b. Écrire $Q : x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

I.6.c. Écrire $R : x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.

I.6.d. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.

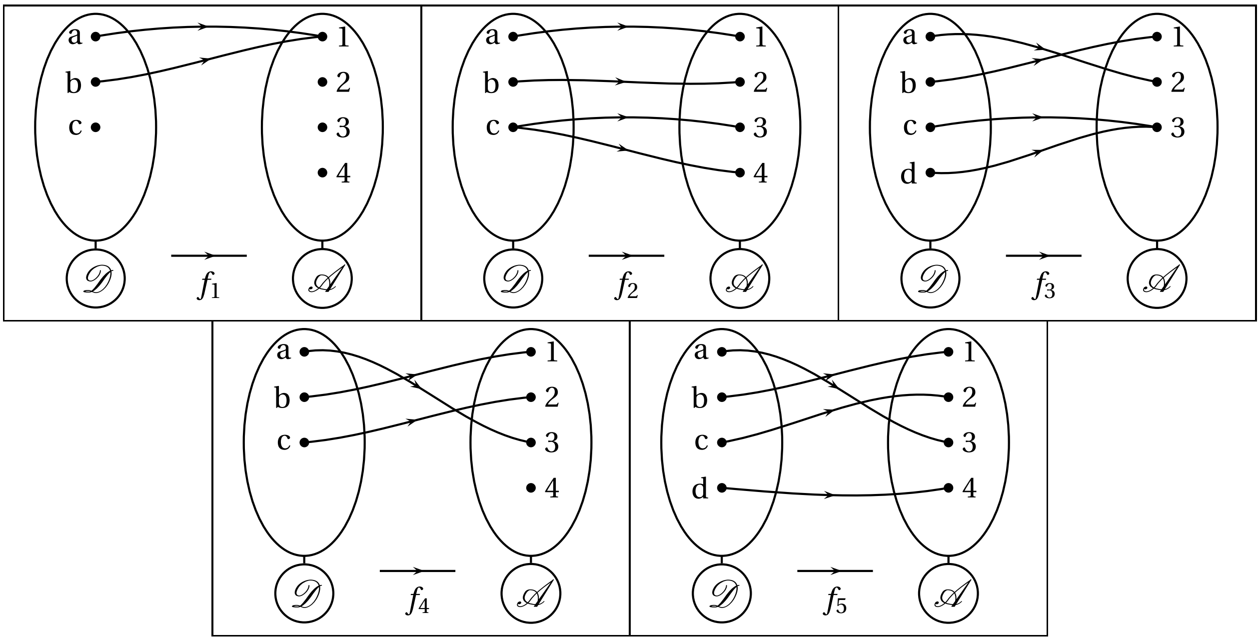
I.6.e. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

I.7 Applications

I.7.1 Introduction

Sur les schémas sagittaux de la table I.1 figurent des relations entre un ensemble de départ, $\mathscr{D}$, et un ensemble d'arrivée, $\mathscr{A}$.

TABLE I.1 – Relations entre deux ensembles.



Une relation *univoque* est une relation dans laquelle tout élément de l'ensemble de départ à une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée :

- f_1 n'est pas univoque car c n'a pas d'image ;
- f_2 n'est pas univoque car c a plusieurs images ;
- f_3, f_4, f_5 sont univoques.

Une relation *biunivoque* est une relation univoque dans laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée à un antécédent et un seul dans l'ensemble de départ :

- f_3 n'est pas biunivoque car 3 a plusieurs antécédents ;
- f_4 n'est pas univoque car 4 n'a pas d'antécédent ;
- f_5 est biunivoque ;
- f_2 n'est pas biunivoque car elle n'est pas univoque.

DÉFINITIONS I.7.1

(1) Une application est une relation univoque entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

(2) Une bijection est une relation biunivoque entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

Notations et vocabulaire

1. *Pour définir une application f de $\mathscr{D}$ vers $\mathscr{A}$, on peut écrire :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Par exemple, l'application , f, de $[1;2]$ vers $\mathbb{R}$ définie par, $f(x) = 2x - 3$, pourra être notée :

$$f : \begin{array}{rcl} [1;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}.$$

2. *Le graphe d'une relation est l'ensemble des couples de $\mathscr{D} \times \mathscr{A}$ dont les éléments sont en relation. Par exemple, le graphe de f_1 est : $\{(a;1);(b;1)\}$.*
Plus généralement, le graphe d'une application, f, est l'ensemble : $\{(x;y) \in \mathscr{D} \times \mathscr{A} \mid y = f(x)\}$.

Par exemple, le graphe de f_1 est : $\{(a;2);(b;1);(c;3);(d;3)\}$.

3. *Lorsqu'une application, f, est une bijection, on dit aussi que f est bijective.*

4. *Si f est bijective et si y est un élément de $\mathscr{A}$, l'antécédent de y par f est noté $f^{-1}(y)$.*
On a alors : $\quad \forall (x;y) \in \mathscr{D} \times \mathscr{A}, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$

5. *On définit ainsi la* bijection réciproque *de f, notée f^{-1}, qui est une bijection de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$.*

6. *Pour tout ensemble, $\mathscr{E}$, l'*application identique *de $\mathscr{E}$, notée* $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, *est l'application qui a tout élément de $\mathscr{E}$ associe lui-même*

D'après les définitions I.7.1 une application est déterminée par son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et son graphe ; on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.7.1

Deux applications sont égales si, et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée ;
- chaque élément de l'ensemble de départ a la même image par les deux applications.

Remarque *Si f est une application d'un ensemble $\mathscr{E}$ vers un ensemble $\mathscr{F}$ et g est une application de $\mathscr{F}$ vers un ensemble $\mathscr{G}$, alors $g \circ f$ est une application de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{G}$*

THÉORÈME I.7.2

Soit f une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ dans un ensemble $\mathscr{A}$.

(1) Si f est bijective, alors : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$.

(2) S'il existe une application g de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, alors : f est bijective et sa bijection réciproque est g.

Démonstration (1) Les applications $f \circ f^{-1}$ et $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ ont le même ensemble de départ et d'arrivée, $\mathscr{A}$.
Il ne reste qu'à démontrer que chaque élément de l'ensemble de départ a la même image par les deux applications.
Soit x un élément de $\mathscr{D}$ désignons par y son image par f, on a donc : $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(y\right) = x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x)$. Donc : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.
Les applications $f \circ f^{-1}$ et $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ ont le même ensemble de départ et d'arrivée, $\mathscr{A}$.
Soit y un élément de $\mathscr{A}$ désignons par x son antécédent par f, on a donc : $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}(y)$. Donc : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$.

(2) Pour démontrer que f est bijective, il suffit de montrer que tout élément de $\mathscr{A}$ a un unique antécédent par f.

existence Tout élément, y, de $\mathscr{A}$ a pour antécédent : $g(y)$. En effet : $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}(y) = y$.

unicité Soit x et x' deux antécédents d'un élément, y, de $\mathscr{A}$. Démontrons que : $x = x'$.
On a : $x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(f(x')) = g \circ f(x') = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x') = x'$

Démontrons que g est la bijection réciproque de f. Les application g et f^{-1} ont le même ensemble de départ, $\mathscr{A}$, et le même ensemble d'arrivée, $\mathscr{D}$. Soit $y \in \mathscr{A}$. Posons : $x = f^{-1}(y)$. On a : $f^{-1}(y) = x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$.
Donc : $f^{-1} = g$. □

Pour démontrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété, il suffit de considérer deux objets vérifiant la propriété et de démontrer qu'ils sont identiques.

I.7.2 Image, image réciproque d'un ensemble

Soit D un sous-ensemble de $\mathscr{D}$. L'image de D par une application, f, est l'ensemble des images des éléments de D. Cet ensemble est noté : $f(\mathrm{D})$.

$$f(\mathrm{D}) = \left\{f(x) \,\middle|\, x \in \mathrm{D}\right\}$$

Exemple *En reprenant les applications de table I.1, il vient :* $f_3\left(\{b;c\}\right) = \{1;3\}$

Soit A un sous-ensemble de $\mathscr{A}$. L'image de réciproque de A par une application, f, est l'ensemble des antécédents des éléments de A. Cet ensemble est noté : $f^{-1}(\mathrm{A})$.

$$f^{-1}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathscr{D} \mid f(x) \in \mathrm{A}\}$$

Exemple *En reprenant les applications de la table I.1, il vient :* $f_3^{-1}(\{1;3\}) = \{b;c;d\}$

Remarque *D'après les deux exemples précédents, lorsque f n'est pas bijective, les ensembles* D *et* $f^{-1}(f(\mathrm{D}))$ *ne sont pas forcément égaux.*

I.7.3 Cas ou les ensembles de départ et d'arrivée sont des intervalles

Dans ce paragraphe I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$, f désigne une application de I vers J et $\mathscr{C}_f$ désigne la représentation graphique de f. Le graphe de f est donc l'ensemble des coordonnées des points de $\mathscr{C}_f$.
Dans l'hypothèse ou f est bijective, désignons par $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ la représentation graphique de f^{-1}. Pour tout point $\mathrm{M}(a;b)$ on désigne par M' le symétrique de M par rapport à la première bissectrice. M' est donc, d'après I.8.2, le point de coordonnées $(b;a)$. On a :

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C}_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff \mathrm{M}' \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

On en déduit que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exemple *L'application* cos *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ *n'est pas bijective car le nombre 1 a plusieurs antécédents (tous les multiples de* 2π*). Cependant, si on restreint* cos *à l'intervalle* $[0;\pi]$, *on a le tableau de variation suivant.*

x	0	π
$\cos(x)$	1 ↘	-1

Ce tableau suggère et nous admettons que l'application, $\begin{aligned} f : [0;\pi] &\longrightarrow [-1;1] \\ x &\longmapsto \cos(x) \end{aligned}$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction Arc cosinus, notée Arccos, *c'est une bijection de* $[-1;1]$ *dans* $[0;\pi]$. *Sa courbe représentative se déduit de celle de la fonction cosinus par la réflexion d'axe* Δ.

Exercice I.7.1. ***On considère l'application :***

$$\boldsymbol{f :} \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x+1} \end{array}.$$

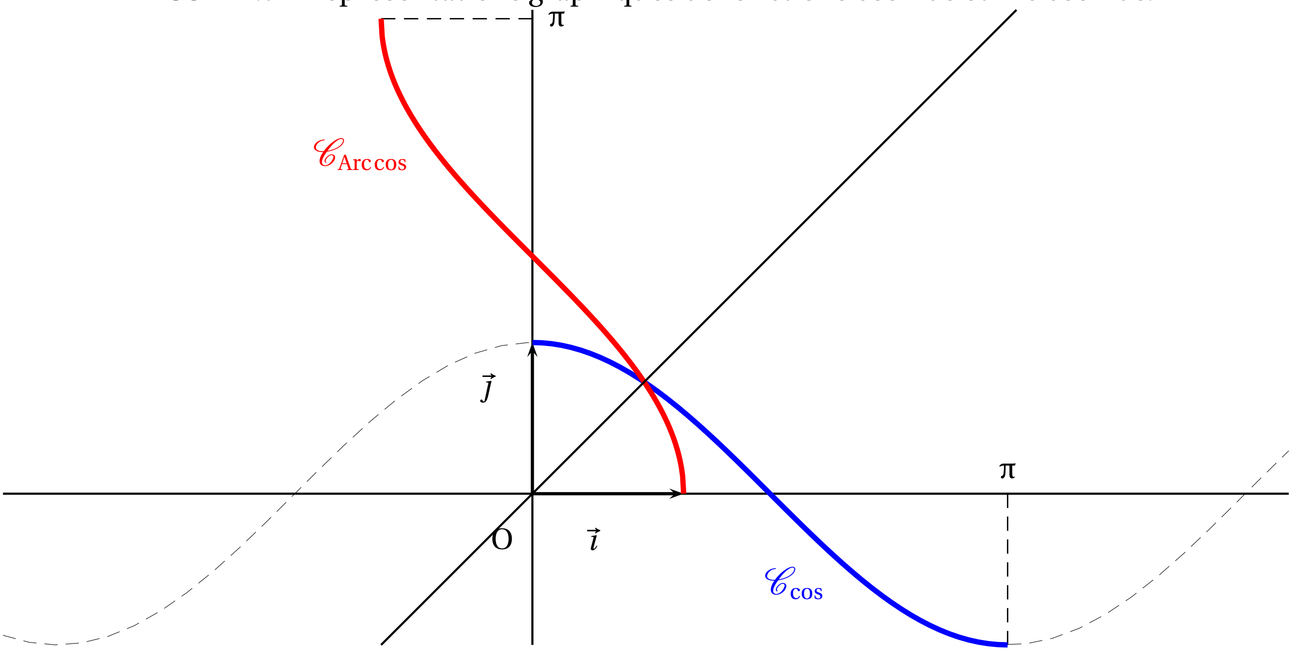
1. Vérifier que l'application f est bien définie.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution 1. *Pour vérifier que f est bien définie, il suffit de vérifier que :* $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ f(x) \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ *; c'est-à-dire que l'équation :* $f(x) = 2$ *; n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. *Résolvons cette équation dans cet ensemble.*

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2x}{x+1} = 2 \\ &\iff 2x = 2x+2 \qquad \text{car } x \neq -1 \\ &\iff 0 = 2 \end{aligned}$$

FIGURE I.7 – Représentations graphiques de fonctions cosinus et Arc cosinus.



$$\boxed{\textit{\textbf{L'application } f \textbf{ est bien définie.}}}$$

2. *Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On a :*

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \frac{2x}{x+1} = y \\ &\iff 2x = yx + y \qquad \text{car } x \neq -1 \\ &\iff x(2-y) = y \\ &\iff x = \frac{y}{2-y} \qquad \text{car } y \neq 2 \end{aligned}$$

On en déduit que y a un antécédent unique : $\dfrac{y}{2-y}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{\textbf{f est bijective et sa réciproque est}} \\ \begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{-x+2} \end{array}. \end{array}}$$

□

I.7.4 Exercices

I.7.a. Déterminer la bijection réciproque de, $f : x \mapsto 3x+2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.7.b. Déterminer la bijection réciproque de, $f : x \mapsto -5x+4$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.7.c. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x+2} \end{array}.$$

1. Vérifier que f est bien définie.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.d. On considère l'application, $f: x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$. Est-elle bijective ? justifier.

I.7.e. On considère l'application, $f : x \mapsto -x^2$, de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^-$. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.f. On admet que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. La bijection réciproque est appelée Arc sinus et notée Arcsin. Dresser le tableau de variation de Arcsin, puis tracer sur un même graphique les représentations graphiques de sin et Arcsin.

I.7.g. ⋆⋆ On considère l'application, $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. Vérifier que pour tout réel, $x : f(x) > 0$.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.h. ⋆ f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I.
Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

I.7.i. ⋆ f est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I.
Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

I.7.j. ⋆ f est une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$. g est-elle la bijection réciproque de f ? il conviendra de justifier la réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.

I.7.k. ⋆ f est une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. g est-elle la bijection réciproque de f ? il conviendra de justifier la réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.

I.7.l. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.

I.7.m. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. Démontrer que g est-elle la bijection réciproque de f.

I.7.n. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{E}$ vers un ensemble $\mathscr{F}$ et g est une bijection de $\mathscr{F}$ vers un ensemble $\mathscr{G}$. Démontrer que $g \circ f$ est une bijection de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{G}$ et déterminer une expression de la bijection réciproque de $g \circ f$ en fonction de f^{-1} et g^{-1}.

I.8 Expressions analytiques de quelques transformations

Pour chaque transformation, t, étudiée, $\mathrm{M}'(x', y')$ désignera l'image de $\mathrm{M}(x, y)$. L'expression analytique de t est l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

I.8.1 Expression analytique d'une translation

Désignons par $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a pour tout point $\mathrm{M}(x, y)$ d'image $\mathrm{M}'(x', y')$:

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{v}.$$

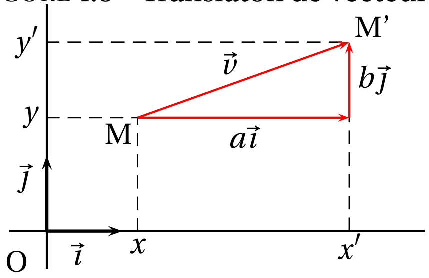
On en déduit en introduisant l'origine O par lar la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \vec{v}.$$

On sait que deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées on en déduit l'expression analytique de t :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

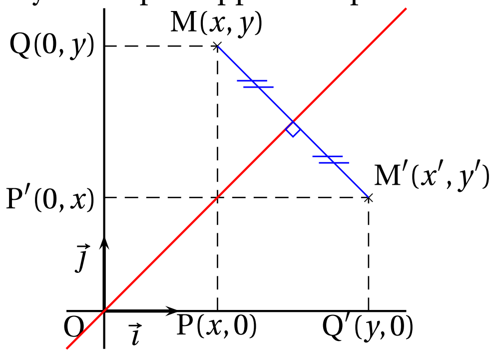
FIGURE I.8 – Translaton de vecteur $\vec{v}$.



I.8.2 Expression analytique de la symétrie par rapport à la première bissectrice

On suppose ici que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{j}\,)$ est orthonormé. Δ désigne la droite d'équation : $y = x$. Δ est l'une des bissectrices des axes Ox et Oy. On dit que c'est la première bissectrice. La seconde bissectrice à pour équation : $y = x$.

FIGURE I.9 – Symétrie par rapport à la première bissectrice.



Désignons par s_Δ la symétrie d'axe Δ. s_Δ transforme Ox en Oy et Oy en Ox. Désignons par P et Q les projetés othogonaux respectifs de M sur Ox et Oy, ils ont respectivement pour coordonnées $(x, 0)$ et $(0, y)$. Le quadrilatère OPMQ a trois angles droits (en O, P et Q), c'est donc un rectangle. s_Δ est une isométrie elle conserve donc les distances et l'orthogonalité. En particulier elle transformera le rectangle OPMQ en un rectangle OP$'$M$'$Q$'$. P est sur Ox donc P$'$ est sur Oy, de plus OP$'$ = OP, donc P$'$ a pour coordonnées $(0, x)$. De même Q$'$ a pour coordonnées $(y, 0)$. P$'$ et Q$'$ sont les projetés orthogonaux de M$'$ sur les axes de coordonnées, on en déduit l'expression analytique de s_Δ :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

I.8.3 Quelques expressions analytiques

Plus généralement, un graphique adapté permet de retrouver les expressions analytiques suivantes :

I.8.4 Exercice résolu

Exercice I.8.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{j}\,)$. On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la translation, t, de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.***
Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.

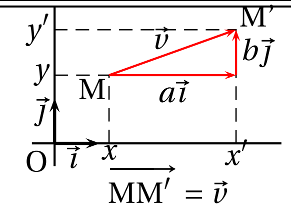
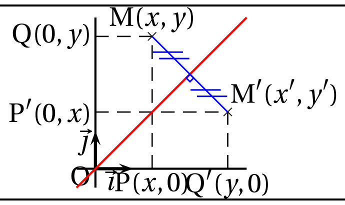
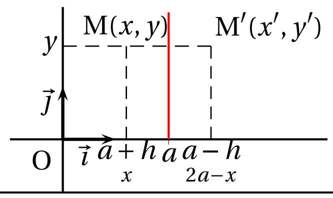
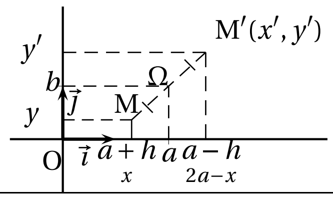
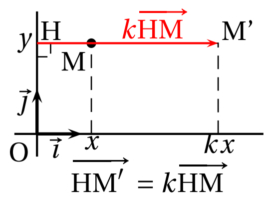
Transformation	**M a pour image M'**	**Expresion analytique**
Translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$		$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$
Symétrie par rapport à la première bissectrice		$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = a$		$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$
Symétrie de centre $\Omega(a,b)$		$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$
Affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport k		$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$

TABLE I.2 – Quelques expressions analytiques.

Solution *La translation a pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Pour tout point $M(x, y)$ *du plan d'image* $M'(x', y')$ *par la trans lation, on a :*

$$M' \in \mathscr{P}' \iff M \in \mathscr{P} \iff y = x^2 \iff y' - 3 = (x' - 2)^2 \iff y' = (x' - 2)^2 + 3.$$

$\mathscr{P}'$ *a donc pour équation :*

$$\boxed{\boldsymbol{y = (x-2)^2 + 3}}.$$

□

I.8.5 Exercices

Dans toute cette série, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I.8.a. Donner une expression analytique de la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

I.8.b. Donner une expression analytique de la réflexion d'axe d'équation : $x = 3$.

I.8.c. Donner une expression analytique de la symétrie de centre $\mathrm{A}(-2;3)$.

I.8.d. Donner une expression analytique de l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport -2.

I.8.e. On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la symétrie, s, de centre $\mathrm{A}(-1;-2)$.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.

I.9 Fonctions associées

Dans toute cette section, u désigne une fonction de référence, c'est-à-dire une fonction que l'on supposera bien connue, $\mathscr{C}_u$ désignera sa représentation graphique, f désignera une fonction définie à partir de u (par exemple par $f(x) = u(x+3)-4$) et $\mathscr{C}_f$ désignera la représentation graphique de f.
Le but de cette section est de dégager un procédé permettant, sans calcul, de tracer $\mathscr{C}_f$ connaissant $\mathscr{C}_u$.

I.9.1 Principaux cas

Les principaux cas d'associations de fonctions sont regroupés dans le tableau I.3. Pour retrouver aisément, à partir de l'expression de $f(x)$, l'expression analytique de l'application du plan dans lui-même par laquelle $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_u$; il suffit de choisir un point $\mathrm{M}(x, y)$ sur $\mathscr{C}_u$ et de considérer son image $\mathrm{M}'(x', y')$. Dans le cas où f est définie par : $f(x) = u(x-a)+b$; les coordonnées de M' vérifieront :

$$y' = f(x') = \overbrace{u(\underbrace{x'-a}_{x})}^{y} + b;$$

d'où l'on tire l'expression analytique recherchée.

Remarques

1. *Les deux premiers cas sont des cas particuliers du troisième.*

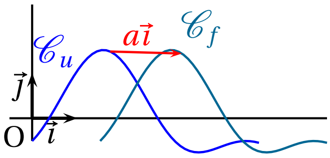
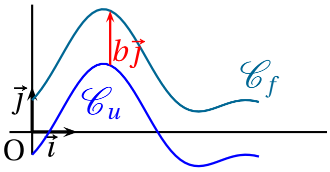
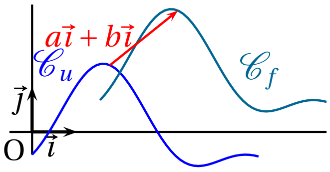
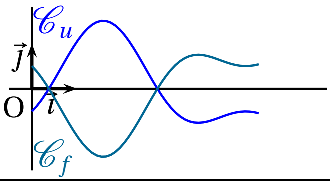
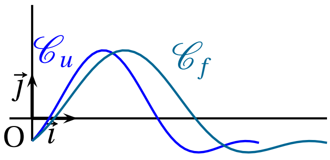
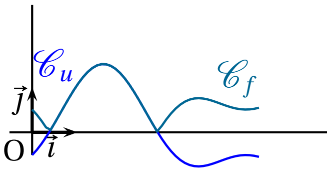
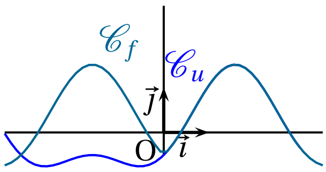
2. *Dans les deux derniers cas l'application du plan dans lui-même employée n'est pas une transformation car elle n'est bijective*[1]*. En effet les points au-dessous de l'axe* Ox *n'ont pas d'antécédent et les points au-dessus de l'axe des abscisses ont deux antécédents : eux-même et leur symétrique par rapport à l'axe des abscisses.*

I.9.2 Quelques courbes de référence

En 6e, il convient de savoir représenter graphiquement une fonction affine (ce qui a été dans les classes précédentes) et tracer l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes, dont les courbes dans un repère orthonormé direct sont données dans la table I.4 : $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \sin x$; $x \longmapsto \cos x$.
On entend ici par allure, un tracé qui respecte les contraintes suivantes : points où la tangente est horizontale ; points d'inflexions[2] ; éléments de symétries ; autre particularités graphiques.

1. Une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F est une application de E vers F telle que tout élément de F a un antécédent et un seul.
2. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.

TABLE I.3 – Courbes de quelques fonctions associées.

Expresion de $f(x)$	**$\mathscr{C}_u$ a pour image $\mathscr{C}_f$**	**Expresion analytique**	**Transformation**
$f(x) = u(x-a)$		$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath}$
$f(x) = u(x) + b$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$	Translation de vecteur $b\vec{\jmath}$
$f(x) = u(x-a) + b$		$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$
$f(x) = -u(x)$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	Réflexion d'axe Ox
$f(x) = u(ax)$		$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{a}x \\ y' = y \end{cases}$	Affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport $\dfrac{1}{a}$
$f(x) = \|u(x)\|$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = \|y\| \end{cases}$	
$f(x) = u(\|x\|)$			

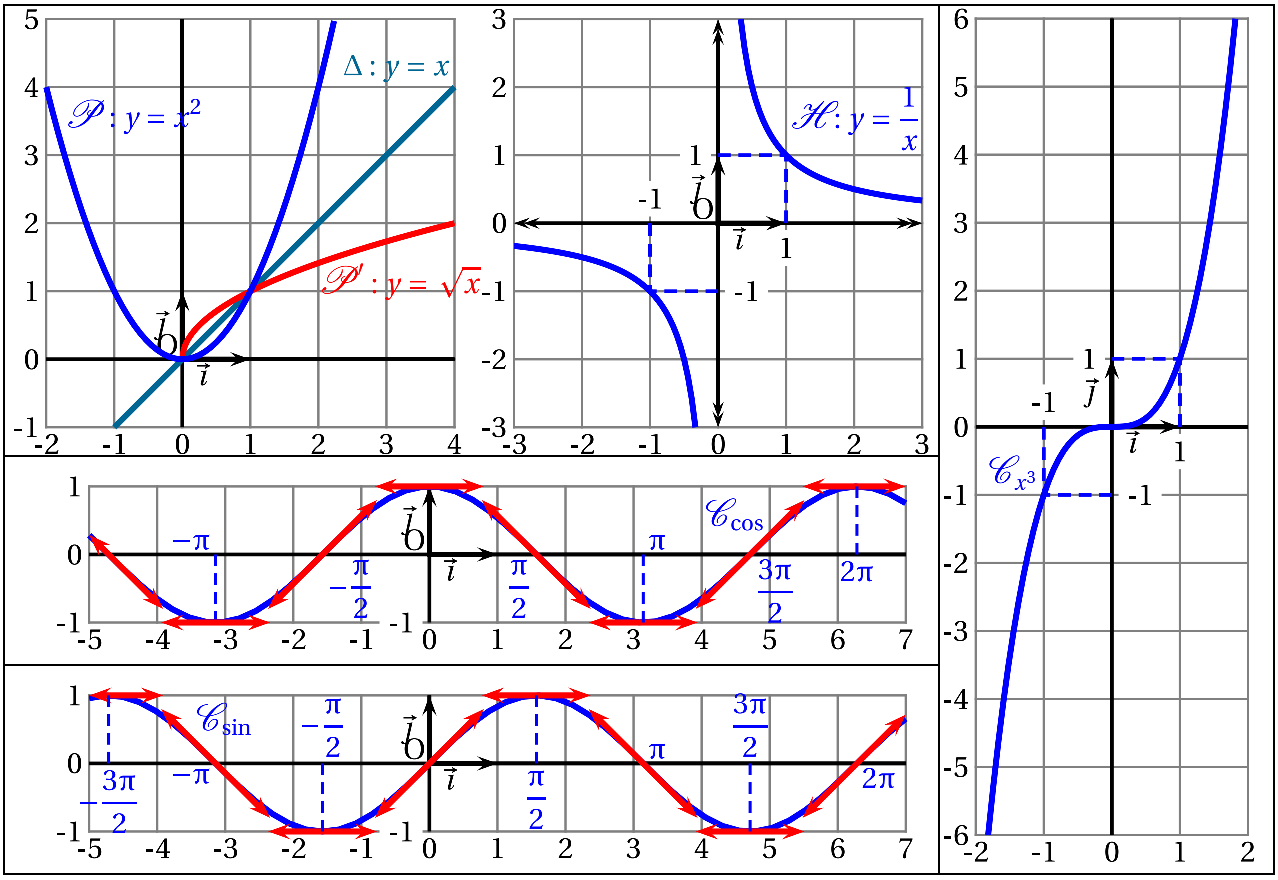
Les applications $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même sont des bijections réciproques l'une de l'autre. On en déduit que la $\mathscr{P}'$ et l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le premier quadrant sont symétriques par rapport à la première bissectrice. On sait que $\mathscr{P}$ est une parabole de sommet O et d'axe Oy, Ox est donc tangent en O à $\mathscr{P}$. On en déduit que $\mathscr{P}'$ est arc de parabole de sommet O, d'axe Ox présentant une demi-tangente verticale en O.

La courbe $\mathscr{H}$ est une hyperbole équilatère[3] dont les asymptotes sont les axes de coordonnées, elle a un centre de symétrie, l'origine, et deux axes de symétrie, les deux bissectrices de axes de coordonnées. La courbe $\mathscr{H}$ coupe la première bissectrice perpendiculairement.

Les représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes dont les points

3. Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

TABLE I.4 – Courbes de référence.



d'inflexions sont les points d'intersection avec l'axe des abscisses. En ces points la tangente à la courbe a pour coefficient directeur -1 ou 1. Le maximum de ces fonctions est 1 et le minimum, -1.

I.9.3 Exercices résolus

Exercice I.9.1. ***Le plan est muni d'un repère othonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
On se propose de tracer la courbe $\mathscr{H}$ représentant graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.
1. Donner l'ensemble de définition, D_f, de f et démontrer que pour tout élément, x, de cet ensemble :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}. \tag{I.3}$$

2. Déduire de (I.3) que $\mathscr{H}$ est l'image par une transformation simple d'une courbe connue et tracer $\mathscr{H}$.

Solution

1. $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

Pour tout $x \in D_f$:

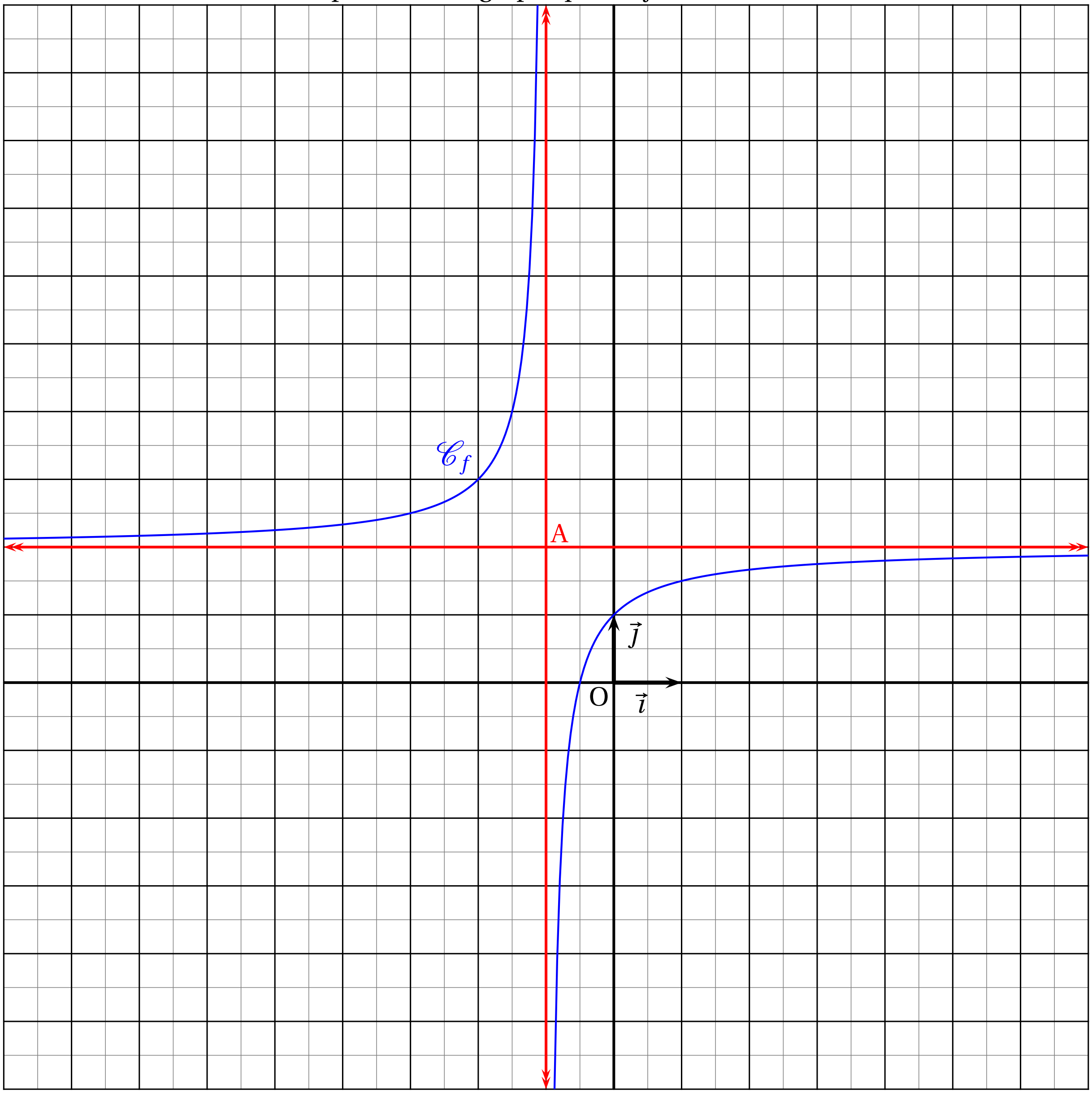
$$\boxed{2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = f(x)}.$$

2. *D'après (I.3) :*

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ est l'image de la courbe d'équation : } y = -\frac{1}{x} \text{ ; par la translation, } t \text{, de vecteur : } \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}.$$

Introduisons l'image A de l'origine, O, par t. $\mathscr{H}$ est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On en déduit la courbe de la figure I.10. □

FIGURE I.10 – Repésentation graphique de f (exercices I.9.1. et I.9.2.).



Exercice I.9.2. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm). Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.***

Solution *L'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -1 & 2 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in D_f$:

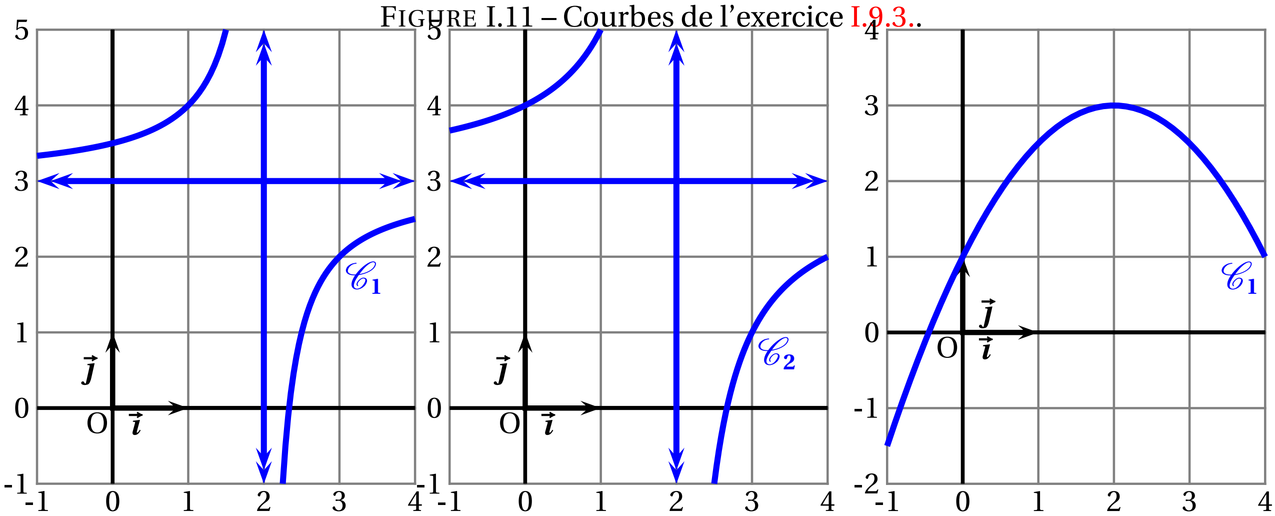
$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

On en déduit que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, est l'image de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = -\dfrac{1}{x}$; par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. On en déduit le graphique de la figure I.10. □

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

Exercice I.9.3. ***Conjecturer des fonctions f_1, f_2, f_3 dont les représentations graphiques respectives sont $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.***

FIGURE I.11 – Courbes de l'exercice I.9.3..



Solution *Introduisons le point* A(2 ; 3).

Dans le repère $(\mathrm{A};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_1$ *semble avoir pour équation :* $\mathrm{Y}=-\dfrac{1}{\mathrm{X}}$. *On propose donc la fonction* f_1 *définie par :*

$$f_1(x)=-\frac{1}{x-2}+3=\frac{3x-7}{x-2}.$$

Dans le repère $(\mathrm{A};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_2$ *semble avoir pour équation :* $\mathrm{Y}=-\dfrac{2}{\mathrm{X}}$. *On propose donc la fonction* f_2 *définie par :*

$$f_2(x)=-\frac{2}{x-2}+3=\frac{3x-8}{x-2}.$$

Dans le repère $(\mathrm{A};\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_3$ *semble avoir pour équation :* $\mathrm{Y}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{X}^2$. *On propose donc la fonction* f_3 *définie par :*

$$f_3(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3=-\frac{1}{2}x^2+2x+1.$$

□

Exercice I.9.4. ***m désigne un nombre réel. On considère les fonctions $f_m : x\mapsto mx+5m+3$ et $h : x\mapsto \dfrac{-x-2}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.

2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique : 1 cm).

Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$.

Solution **1.** *Pour tout réel m, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x)=h(x) \qquad (\mathrm{E}_m)$$

dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Les courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ ont autant de points d'intersection que (E_m) *a de solutions.*

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_m) \quad &\iff \quad mx+5m+3=\frac{-x-2}{x+3}\\ &\iff \quad mx^2+3mx+5mx+15m+3x+9=-x-2\\ &\iff \quad mx^2+(8m+4)x+15m+11=0.\end{aligned}$$

(E_0) *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(\mathrm{E}_0) \iff 4x+11=0 \iff x=-\frac{11}{4}.$$

Donc, pour $m=0$, (E_m) *n'a qu'une solution et donc* $\mathscr{H}$ *et* $\mathscr{D}_0$ *n'ont qu'un point d'intersection.*
Pour $m \neq 0$, (E_m) *est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :*

$$\Delta_m = (8m+4)^2 - 4m(15m+11) = 4\left((4m+2)^2 - 15m^2 - 11m\right) = 4\left(m^2+5m+4\right).$$

Δ_m *est du signe de* $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta = 25-4\times 4 = 9$, *donc* Δ_m *a deux racines :* $m_1 = \frac{-5-3}{2} = -4$ *et* $m_1 = \frac{-5+3}{2} = -1$.
On en déduit le signe de Δ_m *suivant les valeurs de* m *:*

m		-4		-1		0	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$

D'où l'on tire que :

- ***pour*** $m \in \{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ ***et*** $\mathscr{D}_m$ ***n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour*** $m \in]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ ***et*** $\mathscr{D}_m$ ***n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour*** $m \in]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ ***et*** $\mathscr{D}_m$ ***ont deux points d'intersection.***

Un point $\mathrm{A}(x,y)$ *appartient à toutes les droites* $\mathscr{D}_m$ *si, et seulement si pour tout* $m \in \mathbb{R}$ *:* $y = mx+5m+3$. *Or :*

$$y = mx+5m+3 \iff (x+5)m+3-y=0.$$

On cherche donc x *et* y *pour que le polynôme en* m *:* $(x+5)m+3-y$ *; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :*

$$\begin{cases} x+5=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$$

C'est-à-dire lorsque : $(x;y) = (-5;3)$.

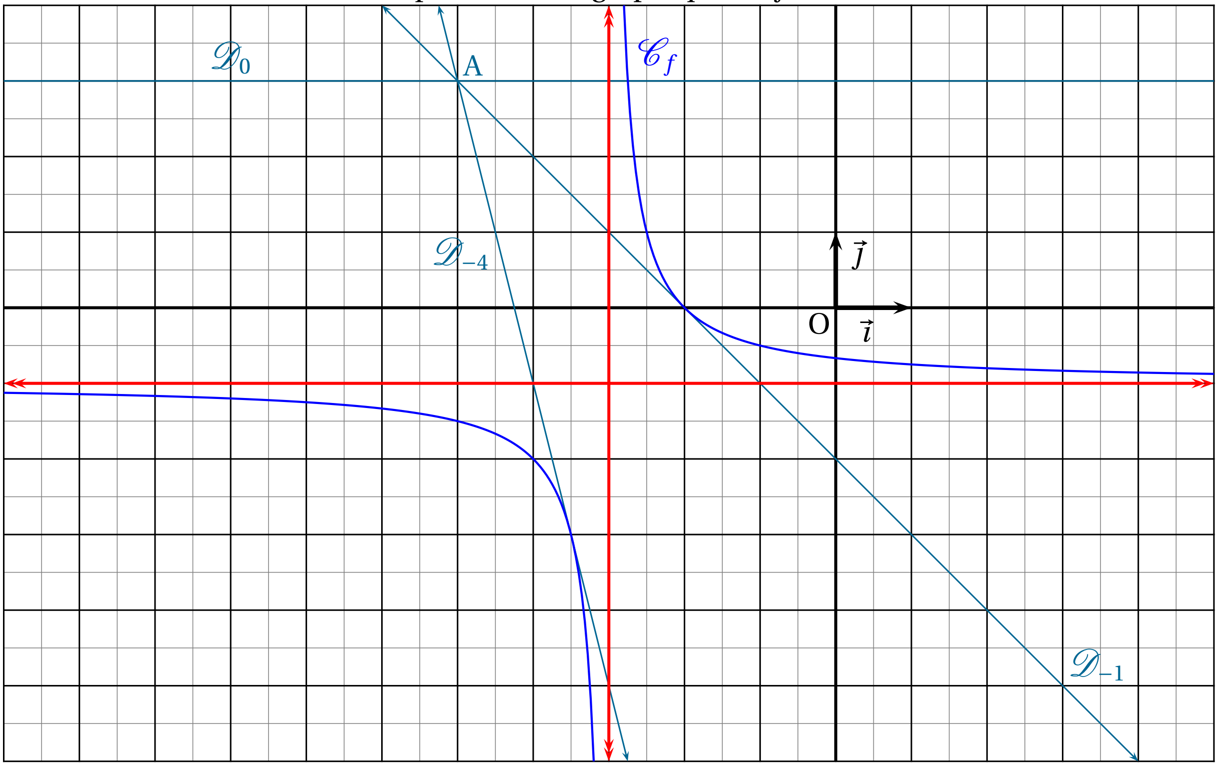
Les droites $\mathscr{D}_m$ ***concourent en*** $\mathbf{A(-5;3)}$

2. $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ *et* $\mathscr{D}_0$ *sont les droites d'équations respectives :* $y=-4x-17$, $y=-x-2$ *et* $y=3$.
De plus, pour tout $x \in \mathrm{D}_h$, *on a :* $h(x) = \frac{-x-2}{x+3} = \frac{-x-3+1}{x+3} = 1+\frac{1}{x+3}$. *Donc* $\mathscr{H}$ *est l'image de l'hyperbole d'équation* $y=\frac{1}{x}$ *par la translation de vecteur* $-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$. *On déduit de cette étude la figure I.12.* □

Exercice I.9.5. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé*** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ***(unité graphique : 1 cm).***
On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ ***et*** $h : x \mapsto \frac{1}{x+3}$ ***ainsi que leurs représentations graphiques respectives*** $\mathscr{D}$ ***et*** $\mathscr{H}$***.***
Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ ***et*** $\mathscr{H}$ ***puis tracer ces deux courbes.***
Solution La position relative des courbes $\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ est déterminée par le signe de la fonction $f-h$ *dont l'ensemble de définition est :* $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. *Pour tout réel* x *:*

$$(f-h)(x) = 2x+3-\frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

FIGURE I.12 – Représentation graphique de f (exercices I.9.4.).



Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 81 - 4 \times 16 = 17$.
Donc le numérateur a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

On en déduit le signe de $f - h$ *:*

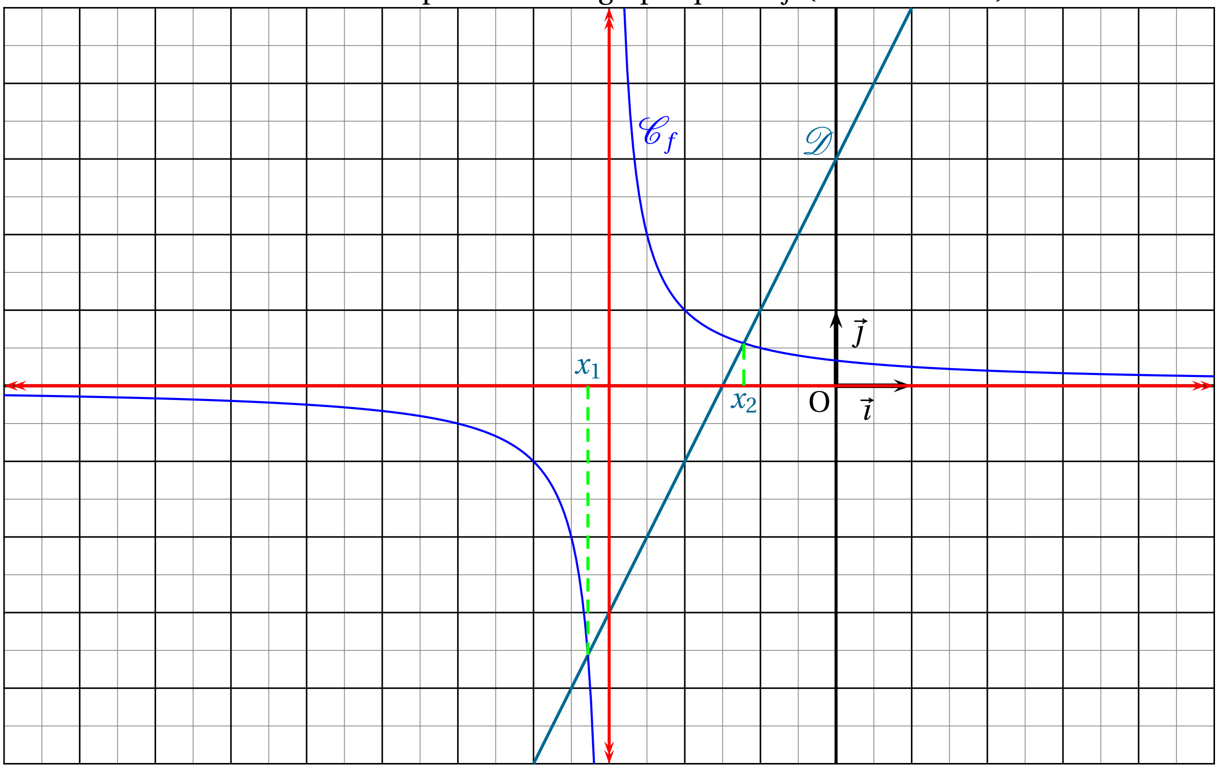
x		$\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$		-3		$\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2+9x+8$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(f-h)(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

D'où l'on tire que :

- **$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$.**
- ***pour* $x \in \left]\frac{-9-\sqrt{17}}{4};-3\right[\cup \left]\frac{-9+\sqrt{17}}{4};+\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;**
- ***pour* $x \in \left]-\infty;\frac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]-3;\frac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.**

De plus $\mathscr{H}$ *est l'image de l'hyperbole d'équation* $y = \frac{1}{x}$ *par la translation de vecteur* $-3\vec{\imath}$*. On déduit de cette étude la figure I.13.* □

FIGURE I.13 – Représentation graphique de f (exercice I.9.5.).



I.9.4 Exercices

I.9.a. Tracer la courbe d'équation : $y = x^2 - 1$.

I.9.b. Tracer la courbe d'équation : $y = (x-2)^2 - 3$.

I.9.c. Tracer la courbe d'équation : $y = \dfrac{2}{x}$.

I.9.d. Tracer la courbe d'équation : $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$.

I.9.e. Tracer la courbe d'équation : $y = \dfrac{2x}{x+3}$.

I.9.f. Tracer la courbe d'équation : $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + \dfrac{1}{2}$.

Chapitre II

Logarithmes

II.1 Une première approche

II.1.1 Activité introductive

Calculer à 10^{-2} près : 2^{π}.
Plus généralement, on admet que pour tout nombre réel, x, le nombre réel, 2^x, est défini. La fonction ainsi définie, $x \longmapsto 2^x$, est appelée *exponentielle de base 2*.
Visualiser sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique de l'exponentielle de base 2.
Dresser le tableau de variation de cette fonction.
Que suggère ce tableau du point de vue de la bijectivité ?
La bijection réciproque de $x \longmapsto 2^x$ est appelée *logarithme de base* 2 et est notée $\log_2$.
Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de $\log_2$, puis tracer sur un même graphique (unité : 1 cm) la première bissectrice, ainsi que les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme de base 2.
Dresser le tableau de variation de $\log_2$.

II.1.2 Définitions

Plus généralement, on a les définitions suivantes.

Définitions II.1.1
Soit $a \in \left]0;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.
(1) L'exponentielle de base a est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$, $x \longmapsto a^x$.
(2) Le logarithme de base a est la bijection réciproque de l'exponentielle de base a.

Notations et vocabulaire

1. *Le logarithme de base a est noté* $\log_a$.
2. *Le logarithme de base* 10 *est appelé logarithme décimal, on le note* log *plutôt que* $\log_{10}$.
3. *L'image d'un réel strictement positif, x, par* $\log_a$ *peut être notée,* $\log_a(x)$ *ou* $\log_a x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc : $y = \log_a x \iff x = a^y$; $a^{\log_a x} = x$; $\log_a\left(a^y\right) = y$.

Exemples

1. $\log\left(10^3\right) = 3$, $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 3$ *et* $\log_3 81 = 4$.
2. $\log\sqrt{10} = \dfrac{1}{2}$, $\log_3\left(9\sqrt{3}\right) = \dfrac{5}{2}$, $\log_2\left(\dfrac{1}{8}\right) = -3$.

Remarque *On peut calculer le logarithme décimal d'un nombre en utilisant la touche* $\boxed{\log}$ *d'une calculatrice scientifique. En utilisant la touche* $\boxed{\log}$ *d'une TI N'spire, on calcule un logarithme en base a.*

Exemple $\log 5 = 0,69\cdots$ *;* $\log_2 3 = 1,584\cdots$.

Exercice II.1.1. ***Résoudre :*** $2^x = \pi$.

Solution *On a :*

$$2^x = \pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_2 \pi$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \{\log_2 \pi\}}.$$

Avec : $\log_2 \pi = 1,651\cdots$ □

II.1.3 Exercices

II.1.a. Simplifier : $\log_2 4$; $\log_5 125$; $\log_3 81$.

II.1.b. Simplifier : $\log 1$; $\log 1\,000\,000$; $\log 0,000\,000\,01$.

II.1.c. Déterminer x et arrondir, le cas échéant, le résultat à deux décimales.
$3 \times 10^x = 2$; $3 \times 10^x - 5 = 0$; $\frac{1}{2} \times 10^{3x} = 4$; $10^{x+1} = 7$

II.1.d. Écrire les exposants des nombres suivants sous la forme d'un logarithme : $z = a^v$; $u = b^t$; $3s = r^b$; $d^p = \sqrt{g}$.

II.1.e. Déterminer x dans chacun des cas suivants :
$x = \log_a 1$; $x = \log_a a$;
$x = \log_a \sqrt{a}$; $x = \log_a \left(\frac{1}{a}\right)$; $\log x = 3$; $\log_3 x = 1$;
$\log_a x = \frac{1}{2}$; $\log_a(3x) = 2$.

II.2 Propriétés et applications

II.2.1 Propriétés

L'activité introductive suggère le théorème suivant, qui est admis.

Théorème II.2.1
Pour tout nombre réel, a, tel que $a > 1$, les fonctions exponentielle et logarithme de base a sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition.

Le théorème suivant est également admis.

Théorème II.2.2
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous nombres réels b et b' :

(1) $1^b = 1$;

(2) $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $\frac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$;

(3) $(aa')^b = a^b a'^b$; $\frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b$.

La propriété de (2) de ce théorème signifie que les exponentielles transforment les sommes en produits.

THÉORÈME II.2.3
Pour tous nombres réels strictement positifs a, b et b' $(a \neq 1)$ et tout nombre réel α :
(1) $\log_a 1 = 0$;
(2) $\log_a(bb') = \log_a(b) + \log_a(b')$;
(3) $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$; $\log_a\left(\frac{b}{b'}\right) = \log_a b - \log_a b'$;
(4) $\log_a\left(b^\alpha\right) = \alpha \log_a b$.

Démonstration (1) on a, $a^0 = 1$, donc : $\log_a 1 = 0$;
(2) on a : $\log_a(bb') = \log_a\left(a^{\log_a b} a^{\log_a b'}\right) = \log_a\left(a^{\log_a b + \log_a b'}\right) = \log_a b + \log_a b'$.
(3) on a, $\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \log_a\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \log_a 1 = 0$, donc : $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$;
$\log_a\left(\frac{b}{b'}\right) = \log_a\left(b \times \frac{1}{b'}\right) = \log_a b + \log_a\left(\frac{1}{b'}\right) = \log_a b - \log_a b'$;
(4) on a : $\log_a\left(b^\alpha\right) = \log_a\left(\left(a^{\log_a b}\right)^\alpha\right) = \log_a\left(a^{\alpha \log_a b}\right) = \alpha \log_a b$. □

La propriété (2) de ce théorème signifie que les logarithmes transforment les produits en sommes.
Exemple $\log_2 648 = \log_2\left(2^3 \times 3^4\right) = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(3^4\right) = 3 + 4\log_2 3$.

Dans l'exemple ci-dessus, on sait que, $\log_2 648 = 3 + 4\log_2 3$, mais on ne connaît aucune valeur approchée de ce nombre si on ne dispose pas d'une calculatrice munie des logarithmes de base a. Le théorème suivant pallie à ce problème.

THÉORÈME II.2.4 LOI DE CHANGEMENT DE BASE
Pour tous nombres réels strictement positifs a, a' et x (avec $a \neq 1$ et $a' \neq 1$) : $\log_{a'} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a a'}$.

Démonstration $\dfrac{\log_a x}{\log_a a'} = \log_a\left(x^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(\left(a'^{\log_{a'} x}\right)^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(\left(\left(a^{\log_a a'}\right)^{\log_{a'} x}\right)^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(a^{\log_{a'} x}\right) = \log_{a'} x$.
□

En particulier, pour $a = 10$, il vient : $\log_{a'} x = \dfrac{\log x}{\log a'}$.

Exemple $\log_2 648 = \dfrac{\log 648}{\log 2} = \dfrac{2,811\cdots}{0,301\cdots} = 9,339\cdots$.

II.2.2 Applications

II.2.2.a Nombres de chiffres d'un nombre écrit dans le système décimal

Choisissons un nombre à 4 chiffres, par exemple, 4 567. On a : $10^3 \leqslant 4567 < 10^4$. D'après le théorème II.2.1 la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que : $3 \leqslant \log 4567 < 4$.
Plus généralement, si x est entier qui s'écrit avec n chiffres dans le système de numération décimal alors,
$10^{n-1} \leqslant x < 10^n$, d'où l'on tire que : $n - 1 \leqslant \log x < n$. On en déduit le théorème ci-dessous.

THÉORÈME II.2.5
Pour tout nombre entier naturel non nul, x, le nombre de chiffres avec lequel s'écrit x dans le système de numération décimal est, $\lfloor \log x \rfloor + 1$, où $\lfloor \log x \rfloor$ désigne la partie entière du logarithme décimal de x.

Remarque *De même, le nombre de chiffres avec lequel s'écrit x dans le système de numération en base a où a est un entier supérieur ou égal à 2 est :* $\lfloor \log_a x \rfloor + 1$

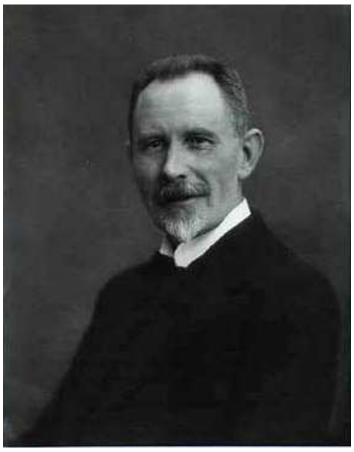
Exercice II.2.1. ***Avec combien de chiffres le nombre 2011^{2012}, s'écrit-il dans le système de numération décimal ?***

Solution *D'après le théorème II.2.5, le nombre cherché est :* $\lfloor \log 2011^{2012} \rfloor + 1 = \lfloor 2012 \log 2011 \rfloor + 1 = 6647$ □

Exercice II.2.2. ***Combien faut-il d'octets pour coder le nombre 2011^{2012} ?***

Solution *Les octets codent les nombres de* 0 *à* 255*, donc coder les entiers en octets revient à les écrire en base* 256 *où chaque octet représente un chiffre. Le nombre d'octets cherché est donc :*
$\lfloor \log_{256} 2011^{2012} \rfloor + 1 = \lfloor 2012 \log_{256} 2011 \rfloor + 1 = 2560$ □

II.2.2.b pH d'une solution chimique

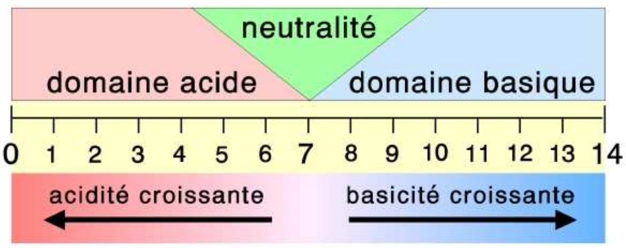


Cette notion, du latin « potentia Hydrogenii » (force de l'hydrogène) a été introduite en 1909 par Peter Lauritz Soerensen [1] pour caractériser l'acidité d'une solution par un nombre simple. Comme la concentration des ions H^+ (remplacés par $H3O^+$ dans la théorie de Broensted-Lowry de 1923), généralement très faible, s'exprime par une puissance négative de 10, Soerensen proposa de caractériser l'acidité d'une solution par la valeur opposée du logarithme décimal de la concentration en H^+. Dans le contexte de la théorie de Broensted-Lowry, on définit pour les solutions diluées $\mathrm{pH} = -\log[H3O+]$ et de façon analogue $\mathrm{pOH} = -\log[OH^-]$. À partir de l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau, on déduit le produit ionique de l'eau, valable pour toute solution aqueuse : $[H3O^+]\,[OH^-] = 10^{-14}\ \mathrm{mol}^2/\mathrm{l}^2$ (à 25 °C) d'où l'on déduit : $\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14$ (à 25 °C). Il en résulte que :

- dans l'eau pure, $H3O^+$ et OH^- sont produits en nombre égal, donc $[H3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, d'où : $\mathrm{pH} = \mathrm{pOH} = 7$;
- dans une solution acide, l'acide dissous fournit un excès de $H3O^+$, donc $[H3O^+] > 10^{-7}\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pH} < 7$ et $[OH^-] < 10^{-7}\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pOH} > 7$;
- dans une solution basique, la base dissoute neutralise des $H3O^+$ fournis par l'eau, donc $[H3O^+] < 10^{-7}\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pH} > 7$ et $[OH^-] > 10^{-7}\ \mathrm{mol \cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pOH} < 7$.

L'échelle pratique des pH est limitée par des concentrations maximales de 1 $\mathrm{mol \cdot l^{-1}}$ en $H3O^+$ ou OH^- et s'étend donc de 0 à 14 (à 25 °C). Des valeurs négatives ou supérieures à 14 sont toutefois envisageables pour des concentrations plus élevées.

TABLE II.1 – Tableau récapitulatif.



Extrait de http://www.al.lu/chemistry/stuff1/EX1/notions/ph.htm

Remarque *La propriété du logarithme décimal évoquée dans la démonstration* ($\log(10^p) = p$) *conduit à l'observation suivante : une concentration dix fois plus forte en acide (respectivement en base) conduit à un* pH *inférieur d'une unité et un* pOH *supérieur d'une unité (respectivement*

1. SØRENSEN Søren Peter Lauritz chimiste danois 1868-1939.

un pH *supérieur d'une unité et un* pOH *inférieur d'une unité).*

II.2.2.c Le décibel

Le décibel (symbole : dB) est un dixième de bel (symbole : B). Le bel est une unité de mesure logarithmique du rapport entre deux puissances, connue notamment pour exprimer la puissance du son. Cette grandeur sans dimension n'appartient pas au système international de mesures. Le gain en bel est le nombre : $\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$.
Par exemple si un amplificateur double une puissance, le gain est : $\log 2$ B.
Or, $\log 2 = 0,301\cdots$, on a donc un gain de 3 dB.
Pour en savoir plus, voir : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Décibel

II.2.3 Exercices

II.2.a. Calculer sans calculatrice : $\log_7 343$; $\log_8 32$; $\log_{25} 125$.

II.2.b. Exprimer, $\log(10!)$, comme combinaison linéaire à coefficients entiers de logarithmes décimaux de nombres premiers.

II.2.c. Tracer sur un même écran, les courbes représentatives des fonctions exponentielles de base 2 et $\frac{1}{2}$. Que remarque-t'on ? expliquer.

II.2.d. Tracer sur un même écran, les courbes représentatives des fonctions logarithmes de base 2 et $\frac{1}{2}$. Que remarque-t'on ? expliquer.

II.2.e. **1.** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, l'ensemble de ses valeurs et sa fonction réciproque.

a. $f_1(x) = a^x$
b. $f_2(x) = 2 - a^x$
c. $f_3(x) = a^{x-3}$
d. $f_4(x) = \frac{1}{2}a^{2-x}$

2. Pour chacun des cas ci-dessus, tracer la courbe représentative correspondant à $a = 2$ ainsi que celle de la fonction réciproque. Vérifier les propositions faites en 1).

II.2.f. On considère la fonction, $f : x \longmapsto \log_a x$, et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Déterminer a.

a. Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par $P\left(2;\frac{1}{2}\right)$.
b. Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par $P(0,64;2)$.

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Définitions

III.1.1 Introduction

DÉFINITION III.1.1 **SUITE NUMÉRIQUE**

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

Exemples

1. *On peut considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $u_n = n^2$.
On a alors : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16 \ldots$
Pour chaque terme u_n on a : $u_n = f(n)$; où f est la fonction $x \mapsto x^2$.
*On dit que la suite (u_n) **est définie explicitement**.*
On peut calculer directement des termes de « grands indices » ($u_{100} = 10\,000$).

2. *On peut considérer la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :* $\left\{\begin{array}{l} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{array}\right.$.

On a alors : $v_2 = \dfrac{1}{2}$; $v_3 = \dfrac{1}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{16} \cdots$
v_0 et v_1 ne sont pas définis.
Pour chaque terme on a : $v_{n+1} = f(v_n)$; où f est la fonction $x \mapsto x^2$.
*On dit que la suite (v_n) **est définie par récurrence** .*
Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.
La suite (v_n) peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.

3. *On peut également considérer la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\left\{\begin{array}{l} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{array}\right.$.
Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Remarques

1. *Toutes les suites étudiées en classe de Sixième et Septième seront définies sur $\mathbb{N}$ ou à partir d'un certain indice.*
2. *Le rang d'un terme est son numéro d'ordre. Par exemple pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$, le premier terme est u_2, donc u_2 est le terme de rang 1. De même, u_9 est le terme de rang 8.*

III.1.2 Opérations

De même que pour les fonctions, on définit la somme, le produit ... de suites numériques.

Exemples *Considérons les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_n = n^3$ *et* $v_n = n^2 + 1$.
On peut considérer les $(u_n + v_n)$ *ou* $(u_n v_n)$ *de termes généraux :* $u_n + v_n = n^3 + n^2 + 1$ *et* $u_n v_n = n^3\left(n^2+1\right) = n^5 + n^3$.

III.1.3 Composée d'une suite par une fonction

Définition III.1.2

Soit f une fonction et (v_n) une suite d'éléments de l'ensemble de définition de f.
La composée de (v_n) par f est la suite (u_n) de terme général : $u_n = f(v_n)$.

Exemple *Si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* f *sont définies par :* $v_n = n^2$ *et* $f(x) = 2x - 3$ *; alors* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $u_n = 2n^2 - 3$.

III.1.4 Exercices

III.1.a. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 4n^2 - n + 1$.

III.1.b. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = u_{n-1}^2 + 1$.

III.1.c. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, composée de la suite (u_n) de l'exercice précédent par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

III.1.d. On considère la suite (u_n) telle que, $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel, n :
$u_{n+1} = u_n^2 + 2n - 5$.

1. Calculer les sept premier termes de cette suite.

2. Placer sur un graphique les points de coordonnées $(n\,; u_n)$ qui se déduisent de la question précédente.

3. Conjecturer une expression explicite du terme général de la suite (u_n).

III.2 Représentation graphique d'une suite

III.2.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction f sur la partie positive de son ensemble de définition.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *définie par :* $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$ *; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction* $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$ *; pour chaque indice* n*,* u_n *est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse* n*.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure III.1).

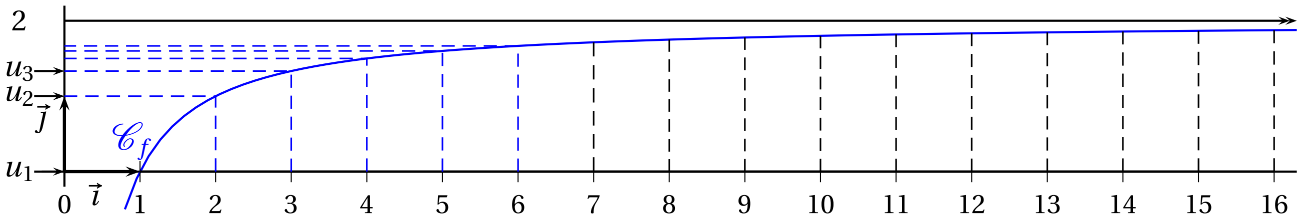


FIGURE III.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

III.2.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction f sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice [1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

Méthode pour placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses lorsque u_n est placé

- On place sur la courbe le point A_n d'abscisse u_n. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}.
- On place sur la première bissectrice le point B_n de même ordonnée que A_n. B_n est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, B_n a donc pour abscisse u_{n+1}.
- Il ne reste plus qu'à placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$ *;*
on trace sur $[0\,;+\infty]$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ et la droite Δ d'équation : $y = x$.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure III.2).

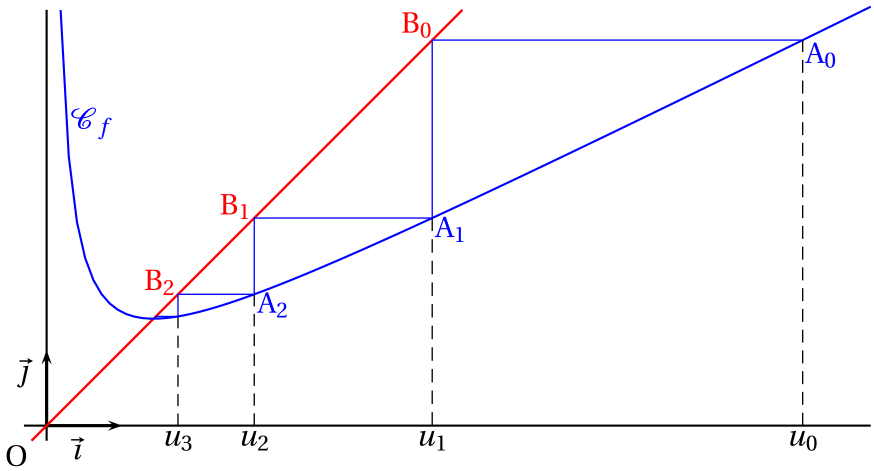


FIGURE III.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

III.2.3 Exercices

III.2.a. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_n = f(n)$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) et déterminer sa limite.

III.2.b. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0,5$ et pour tout en-

1. La première bissectrice est la droite d'équation $y = x$.

tier naturel non nul, n, $u_n = f(u_{n-1})$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) (unité graphique : 20 cm) et conjecturer sa limite.

III.2.c. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). f est la fonction : $x \mapsto 3 - \frac{2}{x}$. $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f. (u_n) est la suite vérifiant, $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer les points fixes[2] de f.

3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite éventuelle.

III.3 Suites arithmétiques - suites géométriques

III.3.1 Suites arithmétiques

III.3.1.a Définition

DÉFINITION III.3.1

Une suite *arithmétique* de *raison* r est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

Exemple *Pour la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_3 = 5$, on a : $u_4 = 3$; $u_5 = 1$; $u_6 = -1 \dots$*

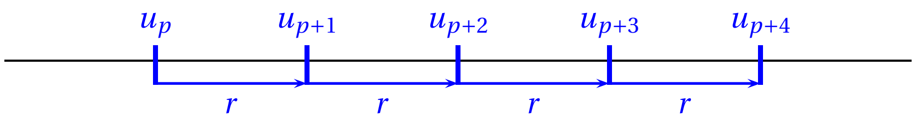


FIGURE III.3 – Suite arithmétique.

La figure III.3 suggère que pour une suite arithmétique de raison r : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p+4$; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.1

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p + r$; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant r. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois r, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison -5 et si $u_{13} = 52$ alors : $u_{121} = u_{13} - 5(121 - 13) = -488$.*

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$.

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.3.2

Si (u_n) est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n - n_0) + u_{n_0}.$$

Exemple *La suite arithmétique (u_n) de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.*

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.3.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

2. *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré 1 est la raison.*

III.3.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.3.1.

THÉORÈME III.3.3

(1) Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.

(2) Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

DÉFINITION III.3.2

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

THÉORÈME III.3.4

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite arithmétique, r sa raison et k l'indice de b.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

III.3.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite arithmétique et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = u_m + (u_m + r) + \cdots + (u_m + (p-m)r) \\ S = (u_m + (p-m)r) + (u_m + (p-m-1)r) + \cdots + u_m \end{cases}$

puis par somme : $2S = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

THÉORÈME III.3.5

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique et m et p des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

Exercice III.3.1. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels non nuls sont les n premiers de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1 + u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice III.3.2. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour k variant de 1 à n ; ce sont donc les n premiers termes de la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$. On en déduit la somme :*
$S = n\dfrac{u_1+u_n}{2} = n\dfrac{1+2n-1}{2} = n^2$ □

III.3.2 Suites géométriques

III.3.2.a Définition

DÉFINITION III.3.3
Une suite *géométrique* de *raison q* est une suite $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples *Considérons les suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n), définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives 2, -3, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs 3, 2, -4. Les cinq premiers termes de chaque suite sont représentés dans la tableau III.1.*

n	0	1	2	3	4
u_n	3	6	12	24	48
v_n	2	-6	18	-54	162
w_n	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

TABLE III.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n).

Remarques
1. *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
2. *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
3. *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
4. *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
5. *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

THÉORÈME III.3.6
Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p q$; $u_{p+2} = u_{p+1} q$; $u_{p+3} = u_{p+2} q$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par q, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème III.3.6 le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.3.7

Si (u_n) est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.3.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*

2. *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

Exemples

1. *La suite géométrique, (u_n), de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\frac{1}{9} \times 3^n$.*

2. *La suite géométrique, (v_n), de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\frac{1024}{(-2)^n}$.*

III.3.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.3.3.

THÉORÈME III.3.8

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Le sens de variation de (u_n) est donné dans le tableau ci-dessous.

(u_n)	$q \in]1;+\infty[$	$q \in]0;1[$	$q \in]-\infty;0[$	$q = 0$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	croissante	décroissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} < 0$	décroissante	croissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} = 0$	constante				

DÉFINITION III.3.4

La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre : $\sqrt{ab}$.

THÉORÈME III.3.9

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors b est la moyenne géométrique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite géométrique, q sa raison et k l'indice de b.

La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = qu_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = qu_k = qb \end{cases}$; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

Représentation graphique d'une suite géométrique

Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison q, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §III.2.2 page 49.

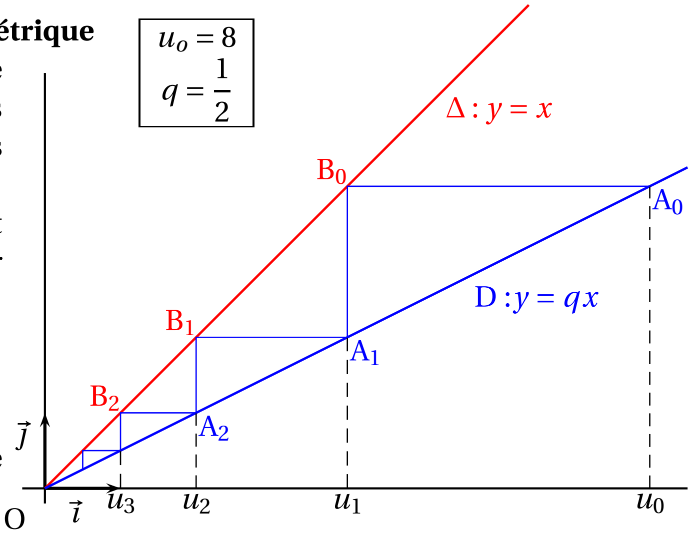
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport q. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel n :

$\overrightarrow{OB_{n+1}} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB_{n+1}} = q\,\overrightarrow{OB_n}$.

Donc B_{n+1} est l'image de B_n par h.

On démontre de même que A_{n+1} est l'image de A_n par h.



III.3.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$) et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & +qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & \\ qS = & & qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_mq^{p-m} & +u_mq^{p-m+1} \end{cases}$

puis par différence : $qS - S = u_mq^{p-m+1} - u_m$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = \frac{u_m - u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme} - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{raison}}$.

Remarque *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul n :* $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Exercice III.3.3. ***Démontrer que pour tout $x \in [0;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$; on a : $1 + x + \cdots + x^n \leqslant \frac{1}{1-x}$***

Solution *$1 + x + \cdots + x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, donc :*

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Or $1 - x$ est strictement positif et : $1 - x^{n+1} \leqslant 1$ (car x est positif) ; donc par quotient :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{1}{1-x} ;$$

c'est-à-dire :

$$1 + x + \cdots + x^n \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

□

COROLLAIRE III.3.10

Pour tous nombres réels a, b et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$\mathscr{C}_f$

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Démonstration Pour $a = 0$, l'égalité devient : $-b^n = -b \times b^{n-1}$; qui est vraie.

Pour $a = b$, l'égalité devient : $0 = 0 \times na^{n-1}$; qui est vraie.

Lorsque $a \neq 0$ et $a \neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\dfrac{b}{a}$, on en déduit que :

$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \dfrac{a^{n-1} - \frac{b^n}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \dfrac{a^n - b^n}{b-a}$.

En multipliant les membres extrêmes par $b-a$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Lorsque $n = 2$, on retrouve l'identité* **??** *et lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité* **??**.

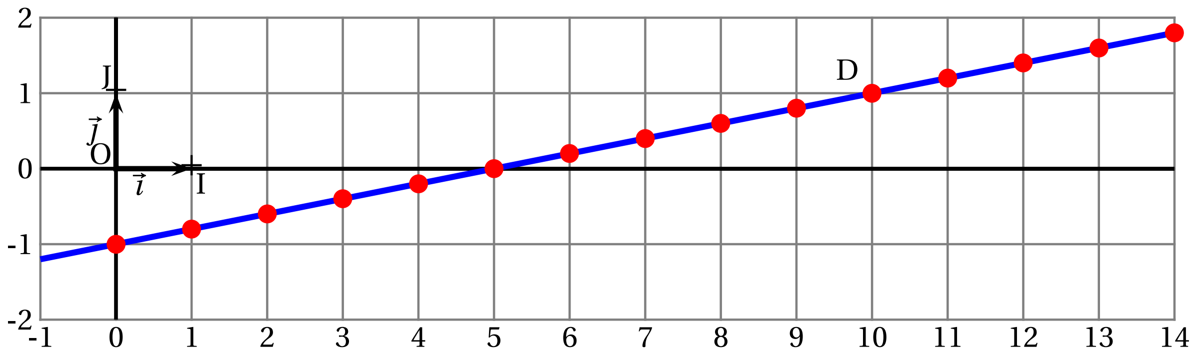
2. *Lorsque n est* impaire, *en remplaçant b par $-b$, on obtient :*

$$a^n + b^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right)$$

Lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité **??**.

III.3.3 Limites de suites arithmétiques

Considérons la fonction affine, $f : x \longmapsto ax + b$, et D sa représentation graphique.



Sur la figure ci-dessus, la droite D est tracée dans un cas où, $a > 0$. Soit M_x le point d'abscisse x de la droite D. On constate que lorsque x tend vers $+\infty$, l'ordonnée de M_x tend vers $+\infty$. Or l'ordonnée de M_x est, $ax + b$, on écrit donc :

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = +\infty.$$

Considérons la suite arithmétique, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison a et de premier terme, $u_0 = b$. Pour tout entier naturel, n, on a donc : $u_n = an + b$. Sur le graphique ci-dessus, la suite (u_n) est représentée par des points rouges. On constate sur le graphique que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Avec, $a < 0$, on aurait eu : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.11

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison, a, et dont le premier terme vaut b.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

III.3.4 Limites de suites géométriques

Calculons 2^n pour les premières valeurs entières de n. On obtient le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Ce tableau suggère et on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

On peut de même calculer les premières valeurs de $\dfrac{1}{2^n}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$

Ce tableau suggère et on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.
Ou les premières valeurs de $(-2)^n$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(-2)^n$	1	-2	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024	-2048	4096

Ce tableau suggère et on admet que $(-2)^{-n}$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Plus généralement, on admet le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.12

Soit q un nombre réel.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 < q \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } \left|q\right| < 1 \end{cases}$$

Si, $q \leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Par produit des limites, on endéduit le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.13

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme a. La limite de (u_n) est donnée par le tableau suivant.

<table>
<tr><td></td><td>$q \leqslant -1$</td><td>$\left|q\right| < 1$</td><td>$q = 1$</td><td>$1 < q$</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td>pas de limite</td><td></td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$a = 0$</td><td colspan="4">0</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>pas de limite</td><td></td><td>a</td><td>$-\infty$</td></tr>
</table>

Démonstration

1^er^ cas : $a = 0$ ou $q = 1$ Le résultat est immédiat car la suite est constante.

2^e^ cas : $a > 0$ et $q \neq 1$

si $\left|q\right| < 1$ On a vu (§ **??**) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 0| = 0$.
Or pour tout indice n : $|u_n - 0| = a\left|q\right|^n$; de plus, d'après le lemme **??** : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|q\right|^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

si $1 < q$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ or (u_n) est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

si $q \leqslant -1$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$; or les termes u_n changent de signe avec la parité de n, donc (u_n) n'a pas de limite.

3e cas : $a<0$ et $q \neq 1$ On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par -1.

□

III.3.5 Exercices résolus

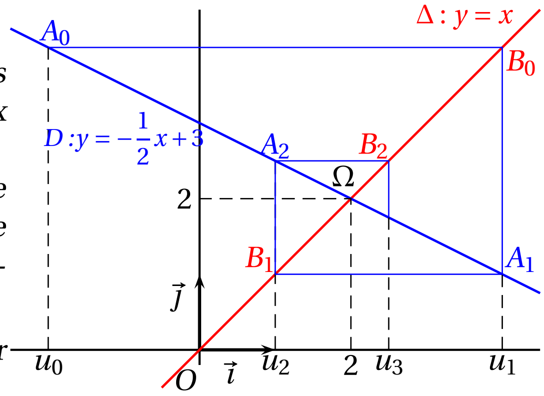
III.3.5.a Suite arithmético-géométrique

Exercice III.3.4. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*** $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

1. Déterminer un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - a$; soit géométrique.

2. Exprimer explicitement le terme général de la suite (v_n) ; en déduire celui de la suite (u_n).

Solution *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*
On trace les droites D et Δ d'équations respectives :
$y = -\frac{1}{2}x + 3$ *et* $y = x$.



Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ vérifient les équations de D et Δ, donc Ω est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.
Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie h, de centre Ω, transforme (pour tout n) A_n en A_{n+1}. Ce qui suggère une relation du type : $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1} = k\overrightarrow{\Omega A}_n$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ et $\overrightarrow{\Omega A}_n$ ont respectivement pour abscisses $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$.
On aurait donc : $u_{n+1} - 2 = k(u_n - 2)$.
Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, la suite (v_n) est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2) = -\frac{1}{2}v_n$.
Donc, pour $a = 2$, la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.
Par conséquent la suite (v_n) est définie par : $v_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 2$;
donc la suite (u_n) est définie par : $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$. □

Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

III.3.6 Exercices

III.3.a. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme, $u_2 = -3$ et de raison 2.
Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{100}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

III.3.b. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme, $u_2 = -2$ et de raison 3.
Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{100}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

III.3.c. (u_n) est la suite géométrique de premier terme, $u_2 = -0,125$ et de raison 2.

1. Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{10}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. Calculer la somme des huit premiers termes de la suite (u_n).

III.3.d. (u_n) est la suite géométrique de premier terme, $u_2 = 729$ et de raison $-\frac{1}{3}$.

1. Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_9. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. Calculer la somme des sept premiers termes de la suite (u_n).

III.3.e. Calculer : $\sum_{n=1}^{9}(2n+3)$ et $\sum_{n=1}^{9} 2n+3$.

III.3.f. Calculer : $\sum_{n=1}^{100}(3n-2)$ et $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)$.

III.3.g. **1.** Calculer : $\sum_{n=1}^{10}\left(3\times 2^n\right)$ et $\sum_{i=1}^{n}\left(3\times 2^n\right)$

2. Calculer : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3\times 2^n\right)$.

III.3.h. **1.** Calculer : $\sum_{n=0}^{10} 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\sum_{i=0}^{n} 6\left(\frac{1}{3}\right)^i$.

2. Calculer : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} 6\left(\frac{1}{3}\right)^i$.

III.3.i. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases} \quad \text{et } \forall n\in\mathbb{N}, v_n = u_n - 3$$

1. Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison, puis d'éterminer des expressions explicites des termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

2. Calculer : $\sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i$.

III.3.j. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

Calculer : $\sum_{i=0}^{n} u_i$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n} u_i$.

III.4 Exercices

III.1. **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{4x-6}{x-1}$.

a. Préciser l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout élément, x, de D_f :

$$\frac{4x-6}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

c. Étudier les variations de f.

d. Déterminer les points fixes de f.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

f. Tracer $\mathscr{C}_f$.

2. Représenter sur le graphique établi en **1.f.** les quatre premiers termes de la suite (u_n) vérifiant, $u_0 = 7$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.
Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

III.2. Suite homographique

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier naturel n, par :
$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$.

1. a. Représenter graphiquement les quatre premiers temes de la suite (u_n). On laissera apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

III.3. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

1. Donner les dix premiers termes de la suite.

2. (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0 = b_0 = 1$. La raison de (a_n) est positive et celle de (b_n) est négative. Elles vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ et $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$.

a. Démontrer que les raisons des suites (a_n) et (b_n) sont les solutions de l'équation :

$$q^2 = q + 1 \qquad \text{(E)}$$

b. En déduire les expressions explicites des suites (a_n) et (b_n).

3. Déterminer le couple (α, β) de nombres réels solution du système : $\left\{\begin{array}{l} \alpha a_0 + \beta b_0 = u_0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 = u_1 \end{array}\right.$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_{n+1} = v_n + v_{n-1}$

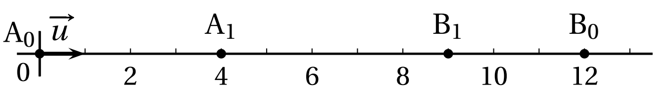
5. Conclure.

Sujets de Baccalauréat

III.4.

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O; \vec{u})$ donné ci-dessous.



Le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12. Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

b. Étudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = 3a_n + 4b_n$.

Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

D'après Antilles-Guyanne juin 2006

III.5. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel, n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4$. On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

D'après France juin 2009

Chapitre IV

Dénombrement

IV.1 Notions Préliminaires

IV.1.1 Rappels et compléments sur les ensembles

Dans tout ce paragraphe, E désigne un ensemble fini.

– Le *cardinal* de E, noté card (E) ou card E, est le nombre d'éléments de E.
  Par exemple, pour $E = \{a, b, c, d\}$, on a : card (E) = 4.
– *L'ensemble des parties* de E est noté $\mathscr{P}(E)$
  Par exemple, pour $E = \{a, b, c\}$, on a : card (E) = 3.
  $\mathscr{P}(E) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$.
  On a : $\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 8$.
– Une *partition* de E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes, dont l'union est E.
  Par exemple $\big\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\big\}$ est une partition de $\{a, b, c, d\}$.

THÉORÈME IV.1.1 PRINCIPE D'ADDITIVITÉ

Si $\{E_1, \ldots, E_n\}$ est une partition de E, alors : $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E_1) + \cdots + \operatorname{card}(E_n)$.

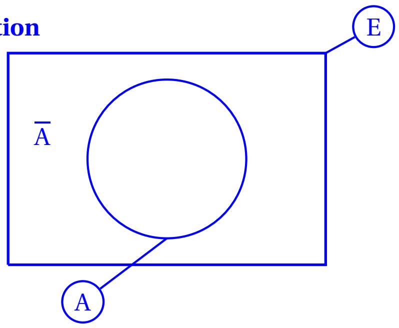
THÉORÈME IV.1.2

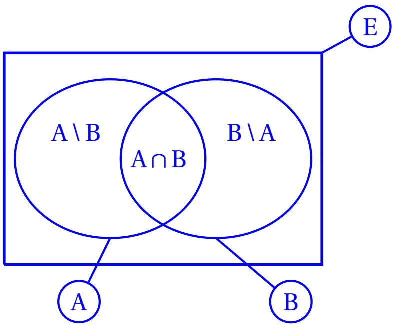
Pour toute parties A et B d'un ensemble E, on a :

(1) $\operatorname{card}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$.

(2) $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$

Démonstration





(1) $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E ; donc :

$$\operatorname{card}(A) + \operatorname{card}\left(\overline{A}\right) = \operatorname{card}(E)$$

On en déduit la propriété.

(2) $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ est une partition de $A \cup B$; donc :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \setminus B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \setminus A)$$

c'est-à-dire :

$$\text{card}\,(A \cup B) = \big(\text{card}\,(A \setminus B) + \text{card}\,(A \cap B)\big) + \big(\text{card}\,(B \setminus A) + \text{card}\,(A \cap B)\big) - \text{card}\,(B \cap A)$$

Or $\{A \setminus B, A \cap B\}$ et $\{A \cap B, B \setminus A\}$ sont respectivement des partitions de A et B ; donc :

$$\text{card}\,(A \setminus B) + \text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\,(A) \qquad \text{et} \qquad \text{card}\,(B \setminus A) + \text{card}\,(A \cap B) = \text{card}\,(B).$$

On en déduit la propriété. □

Exercice IV.1.1. ***Dans un groupe d'individus.***

(1) **200** ***pratiquent le football, parmi eux*** **80** ***pratiquent le rugby et*** **30** ***le tennis de table ;***

(2) **160** ***pratiquent le rugby et parmi eux*** **25** ***pratiquent le tennis de table ;***

(3) **50** ***pratiquent le tennis de table ;***

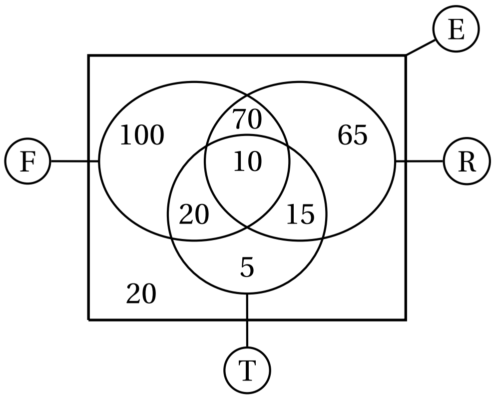
(4) **10** ***pratiquent les trois sports ;***

(5) **20** ***ne pratiquent aucun des sports cités.***

Combien y a-t-il de d'individus dans ce groupe ?

Pour résoudre le problème, on peut construire le diagramme ci-contre.

F désigne l'ensemble des footballeurs etc. On peut répartir les individus en huit classes :
$F \cap T \cap R$; $F \cap T \cap \overline{R}$; $F \cap \overline{T} \cap R$; $\overline{F} \cap T \cap R$; $F \cap \overline{T} \cap \overline{R}$; $\overline{F} \cap T \cap \overline{R}$; $\overline{F} \cap \overline{T} \cap R$; $\overline{F} \cap \overline{T} \cap \overline{R}$;
qui forment une partition de E. On en déduit la construction du diagramme :



- D'après **(5)** : card $\left(\overline{F} \cap \overline{T} \cap \overline{R}\right) = 20$;
- D'après **(4)** : card $(F \cap T \cap R) = 10$;
- D'après **(1)** 80 individus pratiquent le football et le rugby et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 70 pratiquent uniquement le football et le rugby : card $\left(F \cap \overline{T} \cap R\right) = 70$;
- De même : card $\left(F \cap T \cap \overline{R}\right) = 20$;
- Parmi les 200 footballeurs 100 (10+70+20) pratiquent donc au moins un des deux autres sports, d'où : card $\left(F \cap \overline{T} \cap \overline{R}\right) = 100$;
- D'après **(2)** 25 individus pratiquent le rugby et le tennis de table et on sait que parmi eux 10 pratiquent les trois sports donc 15 pratiquent uniquement le rugby et le tennis de table : card $\left(\overline{F} \cap T \cap R\right) = 15$;
- Parmi les 160 rugbymen 10+70+15 c'est-à-dire 85 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : card $\left(\overline{F} \cap \overline{T} \cap R\right) = 75$;
- Parmi les 50 pongistes 10+20+15 c'est-à-dire 45 pratiquent au moins un des deux autres sports, donc : card $\left(\overline{F} \cap T \cap \overline{R}\right) = 5$;

On en déduit le nombre d'individu : 305.

Pour dénombrer un ensemble, on peut en faire apparaître une partition.

IV.1.2 Produit cartésien d'ensembles

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble, noté $E \times F$, des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. L'écriture $E \times F$ se lit « E croix F ».

Exemple

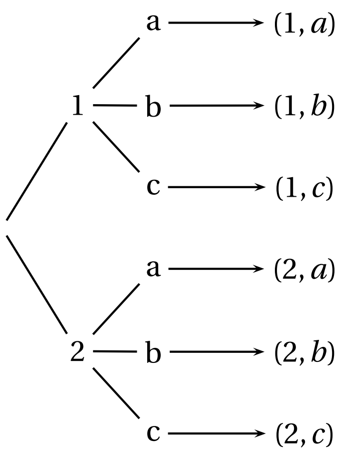
Pour $E=\{1;2\}$ et $F=\{a;b;c\}$, on a :

$\mathrm{E} \times \mathrm{F}=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$

E × F	a	b	c
1	$(1,a)$	$(1,b)$	$(1,c)$
2	$(2,a)$	$(2,b)$	$(2,c)$

THÉORÈME IV.1.3

Lorsque E et F sont des ensembles finis : $\operatorname{card}(\mathrm{E}\times\mathrm{F})=\operatorname{card}(\mathrm{E})\times\operatorname{card}(\mathrm{F})$.



Lorsqu'un ensemble E peut être construit par un arbre où on a :

- 1^{re} étape : n_1 cas ;
- 2^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_2 cas ;
- …
- p^{e} étape : pour chaque cas de l'étape précédente, n_p cas.

On a alors : $\operatorname{card}(\mathrm{E})=n_1\times n_2\times\cdots\times n_p$.

Remarques

1. *Plus généralement, on définit le produit cartésien de p ensembles :* $\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\cdots\times\mathrm{E}_p$

2. *Lorsque $\mathrm{E}_1,\ldots,\mathrm{E}_p$ sont finis, on a :* $\operatorname{card}(\mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2\times\cdots\times\mathrm{E}_p)=\operatorname{card}(\mathrm{E}_1)\times\cdots\times\operatorname{card}(\mathrm{E}_p)$.

3. *En particulier, l'ensemble* $\underbrace{\mathrm{E}\times\mathrm{E}\times\cdots\times\mathrm{E}}_{p\text{ fois}}$ *est noté E^p. Les éléments de E^p sont les p-uplets, ou p-listes, d'éléments de E. Et on a :* $\operatorname{card}(\mathrm{E}^p)=\operatorname{card}(\mathrm{E})^p$.

Exercice IV.1.2. ***Combien y a-t-il de codes possibles dans un cadenas présentant quatre molettes de dix chiffres chacune.***

Solution *Considérons l'ensemble : $E=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $\operatorname{card}(\mathrm{E})=10$. L'ensemble des codes est l'ensemble des quadruplets $(c_1;c_2;c_3;c_4)$ d'éléments de E. Il y a donc $\operatorname{card}(\mathrm{E}^4)$, c'est-à-dire 10 000, codes possibles.* □

IV.1.3 Factorielle

DÉFINITION IV.1.1

Soit n un entier naturel, on appelle $n!$ (lire : « factorielle n ») l'entier naturel non nul défini par :

$$n!=\begin{cases}1\times2\times\cdots\times n & \text{, si } n\neq0;\\ 1 & \text{, si } n=0.\end{cases}$$

Exemples

1. $0!=1$; $1!=1$.

2. $5!=1\times2\times3\times4\times5=120$; *ou encore :* $5!=3!\times4\times5$.

3. $\dfrac{6!}{4!}=5\times6$; $\quad\dfrac{12!}{4!\times8!}=\dfrac{12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4}=445$.

Plus généralement, pour $0 \leqslant p \leqslant n$ *:* $\dfrac{n!}{p!} = (p+1) \times \cdots \times n$.

4. **Exercice IV.1.3.** ***Une mère a quatre petits garçons, elle a acheté quatre voitures de couleurs différentes. De combien de façons peut-elle attribuer une voiture à chacun ?***

Elle a :

- ▷ 4 *choix possibles pour attribuer la première voiture ;*
- ▷ 3 *choix possibles pour attribuer la deuxième voiture ;*
- ▷ 2 *choix possibles pour attribuer la troisième voiture ;*
- ▷ 1 *choix possible pour attribuer la dernière voiture.*

Soit en tout 4 ! = 24.

5. *Plus généralement pour construire une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal* n*. On a :*

- ▷ n *choix possibles pour attribuer l'image du premier élément ;*
- ▷ $n-1$ *choix possibles pour attribuer l'image du deuxième élément ;*

$$\vdots$$

- ▷ $n-k+1$ *choix possibles pour attribuer l'image du* k^{e} *élément ;*

$$\vdots$$

- ▷ 1 *choix possible pour attribuer l'image du dernier élément.*

Soit en tout n !.

On en déduit le théorème suivant.

Théorème IV.1.4

Le nombre de bijections d'un ensemble E vers un ensemble F, de même cardinal n, est $n!$.

Exercice IV.1.4. ***Un groupe de six personnes décide de s'asseoir autour d'une table à six places. De combien de façons les individus peuvent ils se répartir autour de la table ?***

Solution *Chaque répartition est une bijection entre l'ensemble des individus et l'ensemble des places, il y a donc* 6! *répartitions possibles, c'est-à-dire :* 720. □

Remarque *Deux ensembles images l'un de l'autre par une bijection ont même cardinal.*

IV.1.4 Exercices

IV.1.a. A et B sont deux ensembles tels que : card (A) = 12 ; card (B) = 14 et card (A ∩ B) = 5. Déterminer : card (A ∪ B).

IV.1.b. A et B sont deux ensembles tels que : card (A) = 12 ; card (B) = 14 et card (A ∪ B) = 20. Déterminer : card (A ∩ B).

IV.1.c. Écrire en extension puis dénombrer l'ensemble : $\mathscr{P}(\llbracket 1\,;3 \rrbracket)$

IV.1.d. E est l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 20 qui sont multiples de 2 ou de 3, mais pas de 6.

1. Écrire en extension puis dénombrer l'ensemble E.

2. M2 (respectivement M_3) désigne l'ensemble des éléments de E qui sont multiples de 2 (respectivement multiples de 3). Dénombrer M_2 et M_3, puis justifier que $\{M_2, M_3\}$ est une partition de E.

3. En est-il de même si on remplace E par $\llbracket 1\,;10 \rrbracket$?

IV.1.e. Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 4 entrées, 5 plats et 2 desserts ?

IV.1.f. Deux équipes de hockeys de 13 et 16 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Combien de poignées de main ont été échangées ?

IV.1.g. M_2, M_3, et M_6 sont respectivement les sous-ensembles de $[\![1;300]\!]$ dont les éléments sont respectivement multiples de 2, 3 et 6.

1. Justifier que :
$\text{card}(M_2 \cup M_3) = \text{card}(M_2) + \text{card}(M_3) - \text{card}(M_6)$.

2. Que représente l'ensemble $M_2 \cup M_3$. Calculer : $\text{card}(M_2 \cup M_3)$.

IV.1.h. On organise un tournoi individuel de tennis à éliminations directes. n joueurs sont en compétition. Combien de matchs vont-être disputés et pourquoi ?

IV.1.i. Dans un pays, les numéros d'immatriculation des automobiles sont constitués de trois chiffres suivis de trois lettres. Combien d'automobiles peuvent-être immatriculées ?

IV.1.j. On lance deux dés usuels de couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

2. Combien y a-t-il de résultats possibles dont la somme vaut 12 ?

3. Combien y a-t-il de résultats possibles dont la somme est strictement inférieure à 12 ?

4. Combien y a-t-il de résultats possibles dont la somme est strictement inférieure à 12 ?

5. Combien y a-t-il de résultats possibles dont la somme est strictement inférieure à 9 ?

IV.1.k. Combien y a-t-il de façons de répartir 5 chapeaux sur 5 têtes.

IV.1.l. Calculer sans calculatrice.

1. $\dfrac{11!}{8!}$ **2.** $\dfrac{11!-10!}{10!}$ **3.** $\dfrac{13!10!}{12!9!}$ **4.** $\dfrac{1}{18!}-\dfrac{380}{20!}$

IV.1.m. Simplifier les expressions suivantes où n est un entier naturel.

1. $\dfrac{n+1}{(n+1)!}$ **2.** $\dfrac{(2n+5)!}{(2n+1)!}$

3. $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}-\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}$

IV.1.n. Exprimer les quantités suivantes en utilisant la notation factorielle.

1. $7\times 8\times 9\times 10\times 11\times 12\times 13$.

2. $\dfrac{2\times 3\times 4}{10\times 9\times 8\times 7}$.

3. $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

4. n^3-n.

IV.2 Permutations

IV.2.1 Permutations sans répétition

DÉFINITION IV.2.1

Une *permutation sans répétition*, ou plus simplement *permutation* , d'un ensemble E est une bijection de E vers E.

THÉORÈME IV.2.1

Si $\text{card}(E) = n$, alors il y a $n!$ permutations de E.

Exercice IV.2.1. ***Combien d'anagrammes du mot « cela » peut-on former ?***

Solution *Une anagramme du mot « cela » est une permutation de l'ensemble des lettres du mot « cela ». Il y a donc :* $4! = 24$ *anagrammes du mot « cela ».* □

IV.2.2 Permutations avec répétitions

Une permutation avec répétitions est une permutation d'un ensemble dont certains éléments sont indiscernables.

Exemple *Combien d'anagrammes du mot « UCCLE » peut-on former ?*

Une anagramme du mot « UCCLE » est a priori une permutation de l'ensemble des lettres du mot « UCCLE ». Il y aurait donc : $5! = 120$ *anagrammes, mais pour chaque anagramme, en permu-*

tant les deux C, on obtient une anagramme indiscernable de la première. On en déduit (principe du berger) le véritable nombre d'anagrammes de « UCCLE » : $\dfrac{5!}{2!} = 60$.

THÉORÈME IV.2.2

Si card(E) $= n$, avec n_1 éléments e_1 indiscernables, ..., n_p éléments e_p indiscernables, alors il y a $\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_p!}$ permutations avec répétitions de E.

Exercice IV.2.2. ***Combien peut-on former d'anagrammes du mot « BRUXELLES ».***

Solution *Bruxelles est un mot de 9 lettres, dont 2 e et 2 l. Les anagrammes de Bruxelles sont les permutations avec répétitions des lettres du mot Bruxelles, il y en a donc :* $\dfrac{9!}{2! \times 2!} = 90\,720$ □

Exercice IV.2.3. ***Combien peut-on former d'anagrammes du mot « ananas ».***

Solution *Ananas est un mot de 6 lettres, dont 2 n et 3 a. Les anagrammes de ananas sont les permutations avec répétitions des lettres du mot ananas, il y en a donc :* $\dfrac{6!}{2! \times 3!} = 60$ □

IV.2.3 Exercices

IV.2.a. De combien de façon peut-on écrire la liste des élèves de S6MA5FRA en faisant varier l'ordre des noms.

IV.2.b. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

IV.2.c. Les nombres 4, 1 et −6 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.
Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

IV.2.d. **1.** Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE

2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :

a. commençant et finissant par une consonne ;

b. commençant et finissant par une voyelle ;

c. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;

3. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

IV.2.e. Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

IV.3 Arrangements - Tirages successifs

IV.3.1 Arrangements avec répétitions - Tirages successifs avec remise

DÉFINITION IV.3.1

Un arrangement avec répétitions de p éléments d'un ensemble, E, est une p-liste d'éléments de E.

Exercice IV.3.1. ***Une urne contient n billes, numérotées de 1 à n.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.

$\vdots$

On choisit une p-ième bille, on note le choix et on la remet dans l'urne.
Combien y a-t-il de choix possibles ?

Solution
1^re^ *méthode* *Désignons par,* E *l'ensemble des billes.*
L'ensemble des choix possibles est E^p*, il y en a donc :* $\text{card}(E^p) = n^p$.
2^e^ *méthode* *On a* n *possibilités pour le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le deuxième tirage.* □

$\vdots$

On a n *possibilités pour le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a n *possibilités pour le* p*-ième tirage.*
Soit au total : n^p *choix possibles.*

THÉORÈME IV.3.1
Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, est : n^p.

Autrement dit, lorsqu'on pratique le tirage *successif avec remise* de p éléments d'un ensemble E à n éléments, le nombre de choix possibles est : $\text{card}(E^p) = n^p$.

Remarque *On peut avoir :* $p > n$.

Exercice IV.3.2. ***Dans une classe de 17 élèves on doit choisir un responsable du cahier de texte par semaine et ceci pour les 33 semaines de cours. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?***
Solution *Les répartitions possibles sont les arrangements avec répétitions de* 33 *élèves parmi* 17 *; il y a donc,* 17^{33}*, répartitions possibles, c'est-à-dire :* 40 254 497 110 927 943 179 349 807 054 456 171 205 137.
□

IV.3.2 Arrangements sans répartition - Tirages successifs sans remise

Exercice IV.3.3. ***Une urne contient n billes, numérotées de 1 à n.***
On choisit une premier bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
On choisit une deuxième bille, on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.

$\vdots$

On choisit une p-ième bille ($p \leqslant n$), on note le choix et on ne la remet pas dans l'urne.
Combien y a-t-il de choix possibles ?
Solution *On a* n *possibilités le premier tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-1$ *possibilités le deuxième tirage.*

$\vdots$

On a $n-p+1$ *possibilités le* $(p-1)$*-ième tirage.*
Pour chacune des ces possibilités, on a $n-p$ *possibilités le* p*-ième tirage.*
Soit au total : $\underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *choix possibles.* □

Remarque *Chaque résultat possible est une* p*-liste de billes distinctes de l'urne.*

DÉFINITION IV.3.2
Un arrangement de p éléments dans un ensemble, E, à n éléments est une p-liste d'éléments *distincts* de E.

Remarques
1. *On a nécessairement :* $0 \leqslant p \leqslant n$.
2. *Un arrangement de* p *éléments de* E *est donc le résultats du tirage* successif sans remise *de* p

éléments de E.

Notations et vocabulaire *Le nombres d'arrangements de p éléments dans un ensemble à p éléments est noté :* A_n^p.

Le théorème suivant se déduit de l'exercice IV.3.3..

THÉORÈME IV.3.2

Pour tous entiers n et p tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$. On a :

$$\mathrm{A}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice IV.3.4. ***Une course de chevaux, pour le tiercé, a 17 partants. Combien a-t-on d'arrivées possibles ?***

Solution *Désignons par E l'ensemble des chevaux. Les arrivées possibles sont les arrangements (triplets d'éléments* distincts *de E) de 3 chevaux parmi 17 ; il y a donc :* $\mathrm{A}_{17}^3 = \dfrac{17!}{(17-3)!}$ *; arrivées possibles, c'est-à-dire :* $17 \times 16 \times 15 = 4080$. □

Remarque *Lorsque $p = n$, un tirage est une bijection de E vers* $\{1;2;\cdots;n\}$ *et on obtient* $n!$ *tirages possibles.*

IV.3.3 Exercices

IV.3.a. De combien de façons peut-on ranger cinq chemises dans trois rayons sachant que chaque rayon peut accueillir jusqu'à cinq chemises ?

IV.3.b. Le système de sécurité d'un cadenas est composé de 5 molettes de 9 caractères chacune. Combien de codes est-il possible de former avec ce cadenas.

IV.3.c. Une compétition oppose 15 concurrents. Trois prix sont à remporter : le premier ; le deuxième et le troisième.

Combien y a-t-il de résultats possibles, sachant qu'il n'y a pas d'ex æquo ?

IV.3.d. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles ?

IV.3.e. Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

IV.3.f. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

IV.3.g. Un groupe d'élèves de Sixième constitue le bureau de l'association « Bal des Sixèmes » Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier. Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 200 élèves dans ce niveau)

IV.4 Combinaisons - Tirages simultanés

IV.4.1 Combinaisons sans répétition

DÉFINITION IV.4.1

Soit E un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une combinaison (ou combinaison sans répétition) de p éléments de E est une partie de E qui contient p éléments.

Exemple *Pour* $E = \{a, b, c\}$ *et* $p = 2$.
Les combinaisons de deux éléments de E sont les parties : $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{b, c\}$.

Remarques

1. *Dans un ensemble, les éléments sont deux à deux distincts.*
Ainsi $\{a, b, a\}$ *n'est pas un ensemble car il contient deux fois* a.

2. *Deux ensembles qui contiennent les mêmes éléments sont égaux.*
Ainsi : $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Notation Le nombre de parties (i.e. de combinaisons) de p éléments d'un ensemble de n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$, $0 \leqslant p \leqslant n$.

Exemples

1. *De l'exemple ci-dessus, on déduit que :* $\mathrm{C}_3^2 = 3$;

2. *E est un ensemble à* n *éléments. Il n'existe qu'une partie de E qui contient zéro élément, c'est l'ensemble vide, donc :* $\mathrm{C}_n^0 = 1$

3. *une seule partie de E contient n éléments, c'est E lui-même, donc :* $\mathrm{C}_n^n = 1$;

4. *il y a autant d'éléments que de singletons, donc :* $\mathrm{C}_n^1 = n$.

Exercice IV.4.1. ***On considère l'ensemble :*** $\mathrm{E} = [\![1 ; 7]\!]$.

1. Écrire E en extension.

2. Combien y a-t-il d'arrangements de 3 ***éléments de*** E.

3. On considère la combinaison, C, ***de 3 éléments de*** E ***définie par :*** $\mathrm{C} = \{1 ; 3 ; 6\}$.
écrire tous les arrangements de 3 éléments de E ***qu'il est possible de formé avec les éléments de*** C.
Aurait-il été possible de connaître le nombre des arrangements de 3 éléments de E ***qu'il est possible de formé avec les éléments de*** C ***sans tous les écrire ?***

4. En déduire C_n^p ***(on pourra appliquer le principe du berger***[1] ***).***

THÉORÈME IV.4.1

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :
$$\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration Avec les éléments d'une combinaison de p éléments on peut construire $p!$ arrangements de p éléments parmi n. Donc : $\mathrm{A}_n^p = \mathrm{C}_n^p \, p!$. On en déduit l'égalité désirée. □

Exemples

1. $\mathrm{C}_9^3 = \dfrac{9!}{3! \times 6!} = \dfrac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 3 \times 4 \times 7 = 84.$

1. Principe du berger : pour compter le nombre de moutons dans un troupeau, on compte le nombre de pattes et on divise par 4.

2. $C_{49}^{6} = \dfrac{49!}{6! \times 43!} = \dfrac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = 44 \times 3 \times 46 \times 47 \times 49 = 13\,983\,816.$

Exercice IV.4.2. ***25 individus doivent choisir trois d'entre eux pour les représenter. De combien de façon peuvent-ils choisir leurs trois représentants ?***

Solution *Les choix possibles sont les combinaisons de trois individus parmi les 25 du groupe, il y a donc C_{25}^{3} choix possibles ; c'est-à-dire : 2 300.* □

THÉORÈME IV.4.2

Pour tous entiers p et n tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$; on a :

(1) $C_n^p = C_n^{n-p}$.

(2) $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

Démonstration Soit p et n deux entiers tels que : $0 \leqslant p \leqslant n$;

(1) $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\big(n-(n-p)\big)!} = C_n^{n-p}$;

(2)
$$\begin{aligned} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!} \\ &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ &= C_n^p \end{aligned}$$ □

Exemples $C_{10}^{7} = C_{10}^{3}$; $C_{10}^{6} + C_{10}^{7} = C_{11}^{7}$

Remarques *Les propriétés du théorème IV.4.2 se justifient également par des arguments intuitifs simples. Soit E un ensemble à n éléments.*

1. *Une combinaison de E a p éléments si et seulement si la combinaison complémentaire a $n-p$ éléments. Il y a donc autant de combinaisons de E à p éléments que de combinaisons de E à $n-p$ éléments.*

2. *Dans le cas où $1 \leqslant p \leqslant n-1$, on choisit un élément fixé e. Les combinaisons de E à p éléments se répartissent en deux types ; celles qui contiennent e et celles qui ne contiennent pas e. Une combinaison contenant e est l'union de $\{e\}$ avec une combinaison de $E \setminus \{e\}$ à $p-1$ éléments. Il y a donc C_{n-1}^{p-1} combinaisons de E à p éléments contenant e. Une combinaison ne contenant pas e est une combinaison de $E \setminus \{e\}$ à p éléments. Il y a donc C_{n-1}^{p} combinaisons de E à p éléments ne contenant pas e ; d'où : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$*

IV.4.2 Combinaisons avec répétitions

Les combinaisons avec répartition sont utilisées pour résoudre le type de problème suivant : On lance trois dés indiscernables. Combien a-t-on de résultats possibles. Un résultat possible est : $\{1;3;3\}$. De manière générale, les résultats possibles sont appelés combinaisons avec répétitions de trois éléments parmi 6. Le nombre cherché est : $C_{n+p-1}^{p} = C_{6+3-1}^{3} = C_8^3 = 56$.

DÉFINITION IV.4.2

Soit E un ensemble à n éléments. Une combinaison avec répétitions de p éléments de E est une collection de p éléments de E où un même élément peut apparaître plusieurs fois.

Remarque *La différence entre une combinaison et un arrangement est que dans une combinaisons l'ordre des éléments ne compte pas, par exemple :* $\{1;3;3\} = \{3;1;3\}$

Exemple *Prenons* $n = 5$ *et* $p = 3$ *;* $\{1;2;3;4;5\}$ *est l'ensemble des 5 éléments.*
Écrivons tous les sous-ensembles non ordonnés de trois éléments de $\{1;2;3;4;5\}$ *:*

111, 122, 133, 144, 155	*222,233,244,255*	*333, 344, 355*	*444, 455*	*555*
112,123,134,145	*223, 234, 245*	*334, 345*	*445*	
113,124,135	*224, 235*	*335*		
114,125	*225*			
115				

Pour compter ces sous-ensembles (il y en a 35 dans notre exemple), on imagine qu'ils sont formés de combinaisons où les répétitions sont absentes. Il faut donc trouver un moyen de transformer cette écriture...
*Pour cela, on augmente de : 1 unité le chiffre des 2*e *colonnes, 2 unités le chiffre des 3*e *colonnes, ...,* $p-1$ *unités le chiffre des p-ièmes colonnes.*

123, 134, 145, 156, 167	*234, 245, 256, 267*	*345, 356, 367*	*456, 467*	*567*
124, 135, 146, 157	*235, 246, 257*	*346, 357*	*457*	
125, 136, 147	*236, 247*	*347*		
126, 137	*237*			
127				

Le nombre d'éléments des deux listes est le même, mais la nature même des éléments a changé, puisque l'on utilise les chiffres allant de 1 à 7, et non plus de 1 à 5 comme au départ. Notre collection de n *objets est donc agrandie à* $n+p-1$ *objets.*

Le nombre de combinaisons avec répétition de « p » objets pris parmi « n » est donc égale au nombre de combinaisons sans répétition de « p » objets pris parmi « $n+p-1$ *».*
Ce nombre est : C_{n+p-1}^{p}*.*

THÉORÈME IV.4.3

Le nombre de combinaisons avec répétitions de p objets pris parmi n est : $C_{n+p-1}^{p} = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

IV.4.3 Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous récapitule les façons de calculer le cardinal d'un ensemble dans les principaux cas.

	permutations	arrangements	combinaisons
sans répétition	$n!$	$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$	$\dbinom{n}{p} = C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
avec répétitions	$\dfrac{n!}{n_1!\cdots n_p!}$	n^p	$\dbinom{n+p-1}{p} = C_{n+p-1}^{p} = \dfrac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

IV.4.4 Exercices

IV.4.a. Georgette et Hilarion sont membres d'un club de 19 adhérents. On doit former un groupe constitué de cinq d'entre eux pour représenter le club à un spectacle.

1. Combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer ?

2. Dans combien de ces groupes peut figurer

Georgette ?

3. Georgette et Hilarion ne pouvant se supporter, combien de groupes de 5 personnes peut-on constituer de façon qu'ils ne se retrouvent pas ensemble ?

IV.4.b. On lance 5 dés usuelles identiques. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

IV.4.c. Au poker avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains où le joueur annonce « une paire » ?

IV.4.d. Au poker avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains où le joueur annonce « deux paires » ?

IV.4.e. Au poker avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains où le joueur annonce « un brelan » ?

IV.4.f. Au poker avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains où le joueur annonce « un full » ?

IV.4.g. Au poker avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains où le joueur annonce « un carré » ?

IV.4.h. Combien y a-t-il de pièces différentes dans un jeu de dominos si sur chaque pièce figurent deux symboles choisis parmi $\{\text{blanc}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

IV.4.i. Une association de 300 membres doit élire un président. 3 candidats sont en lice. Au dépouillement seuls les suffrages exprimés sont pris en compte. Combien y a-t-il de résultats possibles ?

IV.5 Binôme de Newton

IV.5.1 Triangle de Pascal

On sait que pour $0 < p < n$, on a :

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p.$$

Ce résultat permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche, en formant le triangle de Pascal[2] à l'aide du schéma suivant :

$$\begin{array}{c} C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} \\ \parallel \\ C_n^p \end{array}$$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

IV.5.2 La formule du binôme de Newton

Théorème IV.5.1 — Formule du binôme de Newton[3]

Soit a et b deux nombres réels non nuls et n un entier naturel ($n \neq 0$ si $a + b = 0$). On a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^{n-p} b^p.$$

Remarques

1. *Cette formule explique le nom de « coefficients binomiaux » donné aux nombres C_n^p.*
2. *La formule du binôme de Newton peut être établie à partir de considérations intuitives. Fixons*

2. Blaise Pascal (1623 - 1662), mathématicien, physicien et philosophe français.
3. Isaac Newton (1642 - 1727), mathématicien, physicien et astronome anglais.

n, on a :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\times\cdots\times(a+b)}_{n \text{ facteurs}}. \tag{IV.1}$$

$a+b$ est une somme de monômes de degré 1 en a et b donc $(a+b)^n$ est une somme de monômes de degré n en a et b ; c'est-à-dire de monômes de la forme : $\alpha_p a^{n-p}b^p$; en observant la formule (IV.1) on remarque que α_p est le nombre de fois où apparaît $a^{n-p}b^p$ dans le développement. Or les monômes $a^{n-p}b^p$ apparaissent lorsqu'on prend a dans $n-p$ facteurs et b dans les p facteurs restants. Par conséquent, il y a autant de monômes $a^{n-p}b^p$ dans le développement qu'il y a de façons de choisir $n-p$ facteurs parmi n ; c'est-à-dire : C_n^{n-p} ; ou encore : C_n^p ; donc : $\alpha_p = \mathrm{C}_n^p$; puis :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemple
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1+5\sqrt{2}+10\sqrt{2}^2+10\sqrt{2}^3+5\sqrt{2}^4+\sqrt{2}^5\\ &= 1+5\sqrt{2}+10\times 2+10\times 2\sqrt{2}+5\times 4+4\sqrt{2}\\ &= 41+29\sqrt{2}\end{aligned}$$

COROLLAIRE IV.5.2
Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de parties de E est : 2^n

Démonstration Pour tout entier p tel que : $0 \leqslant p \leqslant n$; le nombre de parties de E à p éléments est :C_n^p. Donc :
$\mathrm{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n = \mathrm{C}_n^0 1^n\times 1^0+\mathrm{C}_n^1 1^1\times 1^{n-1}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}1^{n-1}\times 1^1+\mathrm{C}_n^n 1^0\times 1^n = (1+1)^n = 2^n$ □

Remarque *On aurait pu obtenir cette propriété sans utiliser la formule du binôme du Newton. En effet, numérotons les éléments de E de 1 à n. Considérons une partie A de E, à chaque numéro associons $\in$ si l'élément correspondant appartient à A et $\notin$ sinon, on associe ainsi à A un n-uplet d'éléments de $\{\in,\notin\}$. En répétant le procédé pour toutes les parties de A de E, on met en bijection l'ensemble des parties de E avec l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\{\in,\notin\}$; d'où : $\mathrm{card}\mathscr{P}(\mathrm{E}) = 2^n$.*

IV.5.3 Exercices

IV.5.a. Développer : $(a+b)^5$.

IV.5.b. Développer : $(x+1)^5$.

IV.5.c. Développer : $(x+2)^4$.

IV.5.d. Développer : $(2x+3)^4$.

IV.5.e. Exprimer plus simplement en fonction de l'entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k 3^k$.

IV.5.f. **1.** Exprimer plus simplement en fonction de l'entier naturel non nul, n : $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^k$ et $\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul, n :
$$\sum_{\substack{k=0\\ k\text{pair}}}^{n} \mathrm{C}_n^k = \sum_{\substack{k=0\\ k\text{impair}}}^{n} \mathrm{C}_n^k = 2^{n-1}.$$

IV.5.g. Démontrer que pour tous entiers naturels non nuls a et b :

$$\mathrm{C}_{a+b}^a = \mathrm{C}_{a+b-1}^a + \mathrm{C}_{a+b-1}^b.$$

IV.5.h. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

1. $\mathrm{C}_n^2 = 55$. **2.** $\mathrm{C}_n^{n-2} = 66$.

IV.5.i. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes.

1. $\mathrm{C}_n^7 = \mathrm{C}_n^2$. **2.** $\mathrm{C}_n^6 = 21\mathrm{C}_n^5$.

Chapitre V

Calcul des probabilités

V.1 Calculs de probabilités

V.1.1 Vocabulaire des événements

V.1.1.a Expérience aléatoire

- Lorsqu'on lance un dé, six résultats sont possibles : 1, 2, 3, 4, 5, 6.
  On dit qu'on a réalisé une *expérience aléatoire* (ou *épreuve*) comportant 6 *éventualités* ou *issues* et que l'*univers* associé a cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
- Le lancer de deux pièces de monnaies distinctes est une expérience aléatoire comportant 4 éventualités. L'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$.

Dans la première moitié de ce chapitre, les univers considérés sont des ensembles finis non vides.

V.1.1.b Événements liés à une expérience aléatoire

DÉFINITIONS V.1.1

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

(1) On appelle *événement* toute partie de Ω.

(2) On appelle *événement élémentaire* tout singleton de Ω.

Exemples *Dans le lancer d'un dé :*

1. *« obtenir un nombre pair » est l'événement* $\{2;4;6\}$ *;*

2. *« obtenir un nombre premier pair » est l'événement élémentaire* $\{2\}$.

Dans une épreuve, un événement est réalisé s'il contient le résultat de l'expérience. Par exemple, si on obtient « 4 » lors d'un lancer de dé, l'événement « obtenir un nombre pair » est réalisé.

Le tableau V.1 indique la signification des diverses expressions utilisées dans le langage des événements.

Exemples *Dans le lancer d'un dé, on considère les événements A : « obtenir un nombre pair » ; B : « obtenir un nombre premier » ; C : « obtenir 6 ».*

1. *On a :* $A \cup B = \{2;3;4;5;6\}$ *;* $A \cup B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair ou premier ».*

2. *On a :* $A \cap B = \{2\}$ *;* $A \cap B$ *est l'événement « obtenir un nombre pair et premier ».*

3. *Les événements B et C sont incompatibles.*

4. *On a :* $\bar{A} = \{1;3;5\}$ *;* $\bar{A}$ *est l'événement : « obtenir un nombre impair ».*

Vocabulaire des événements	**Signification ensembliste**	**Notation**
Univers	Ensemble Ω	Ω
Éventualité ou issue	Élément de Ω	ω $(\omega \in \Omega)$
Événement	Partie de Ω	$A (A \subset \Omega)$
Événement élémentaire	Singleton	$\{\omega\} (\omega \in \Omega)$
Événement certain	Partie pleine	Ω
Événement impossible	Partie vide	$\varnothing$
Événement « A ou B »	Réunion des parties A et B	$A \cup B$
Événement « A et B »	Intersection des parties A et B	$A \cap B$
Événements A et B incompatibles	Parties A et B disjointes	$A \cap B = \varnothing$
Événement contraire de A	Complémentaire de A dans Ω	$\overline{A}$

TABLE V.1 – Signification des termes de probabilités élémentaires.

V.1.2 Probabilité d'un événement

V.1.2.a Introduction

On lance un dé bien équilibré; l'univers associé à cette épreuve est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
La chance d'apparition est la même pour chaque face.

- L'événement $\{2\}$ a une chance sur six d'être réalisé; on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{6}$.
- L'événement $\{1;5\}$ a deux chances sur six d'être réalisé, on dit que la probabilité de cet événement est $\frac{1}{3}$.
- « obtenir un nombre pair » est l'événement $\{2;4;6\}$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$.
- L'événement certain a six chances sur six d'être réalisé; sa probabilité est 1.
- L'événement impossible n'a aucune chance d'être réalisé; sa probabilité est 0.

DÉFINITION V.1.2

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Une *probabilité* sur l'univers Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$, qui à toute partie A de Ω associe le nombre réel P(A) appelé probabilité de l'événement A et qui vérifie les conditions suivantes :

- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent;
- la probabilité de l'événement certain est 1;
- la probabilité de l'événement impossible est 0.

Remarques

1. *La probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega\}$ est notée $P(\omega)$.*
2. *Une probabilité P est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités des événements élémentaires.*

ω	ω_1	$\cdots$	ω_i	$\cdots$	ω_n
$P(\omega)$	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

Exemples *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6.*
La probabilité d'apparition d'un nombre pair est le double de la probabilité d'apparition d'un

nombre impair et les probabilités d'apparition de deux nombres de même parité sont égales.
1. *Déterminer la probabilité d'apparition de chaque face du dé.*
L'univers est : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. *Soit* p *la probabilité d'apparition d'un nombre pair et* q *celle d'un nombre impair. On a :* $p = 2q$.
Or : $P(\Omega) = 1$ *; donc :* $3p + 3q = 1$.
On en déduit que : $q = \dfrac{1}{9}$ *et* $p = \dfrac{2}{9}$.
Le tableau ci-contre donne la probabilité d'apparition de chaque face du dé.

ω	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P(ω)	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. *Quelle est la probabilité d'apparition d'un nombre inférieur ou égal à 4 ?*
La probabilité cherchée est celle de l'événement : $A = \{1;2;3;4\}$.
On a : $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = \dfrac{2}{3}$.

V.1.2.b Équiprobabilité

Lorsque les événements élémentaires d'une expérience ont la même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité.*
Les situations d'équiprobabilité sont généralement suggérées par des expressions comme : « dé parfait », « dé non pipé », « pièce parfaite » « boules indiscernables au toucher », « cartes bien battues », « on tire au hasard » etc.

Théorème V.1.1
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Dans l'hypothèse d'équiprobabilité, pour tout événement A, on a : $P(A) = \dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$.

Démonstration Les événements élémentaires ont tous la même probabilité, soit p cette probabilité. On a : $P(\Omega) = 1$; donc : $p\,\text{card}\,(\Omega) = 1$; d'où : $p = \dfrac{1}{\text{card}\,(\Omega)}$.
On en déduit que pour tout événement A, on a : $P(A) = p\,\text{card}\,(A) = \dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)}$. □

Remarque *Les éventualités de A sont appelés cas favorables et celles de Ω, cas possibles.*
On écrit souvent : $P(A) = \dfrac{\textit{nombres de cas favorables}}{\textit{nombres de cas possibles}}$.

Exercice V.1.1. ***On lance deux dés parfaits et on note la somme des nombres obtenus. Quelle est la probabilité d'obtenir 10 ?***
Solution *L'univers Ω est l'ensemble des couples d'éléments de :* $\{1;2;3;4;5;6\}$.
On a : $\text{card}\,(\Omega) = 6^2 = 36$. *« Obtenir 10 » est l'événement :* $\{(4;6),(5;5),(6;4)\}$.
On est dans une situation d'équiprobabilité (dés parfaits), donc la probabilité cherchée est : $\dfrac{1}{12}$. □

Exercice V.1.2. ***On tire simultanément et au hasard 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de tirer le roi de cœur ?***
Solution *L'univers Ω est l'ensemble des combinaisons de 5 cartes d'un jeu de 32, donc :* $\text{card}\,(\Omega) = C_{32}^5 = 201\,376$.
Les cartes sont tirées au hasard, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
Soit A l'événement : « tirer le roi de cœur ». Réaliser A c'est choisir le roi de cœur puis tirer 4 cartes parmi les 31 cartes restantes ; donc : $\text{card}\,(A) = C_{31}^4 = 31\,465$.
La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{\text{card}\,(A)}{\text{card}\,(\Omega)} = \dfrac{31\,465}{201\,376} = \dfrac{5}{32} = 0{,}156\,25$. □

V.1.2.c Propriétés

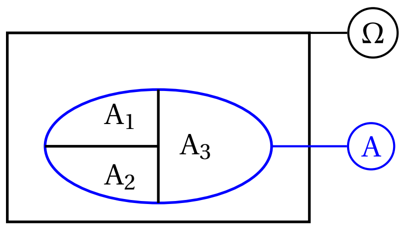
Théorème V.1.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω, A et B deux événements. On a :
(1) si $A \cap B = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
(2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Démonstration
(1) Si l'un (au moins) des événements A ou B est impossible, alors la propriété est évidente. En effet si $A = \varnothing$ alors : $P(A \cup B) = P(\varnothing \cup B) = P(B)$ et $P(A) + P(B) = P(\varnothing) + P(B) = 0 + P(B) = P(B)$.
Si les deux événements sont possibles, alors quitte à numéroter à nouveau les éventualités on peut supposer que : $A = \{\omega_1 ; \dots ; \omega_p\}$ et $B = \{\omega_{p+1} ; \dots ; \omega_q\}$.
On a alors : $A \cup B = \{\omega_1 ; \dots ; \omega_q\}$;
d'où : $P(A) + P(B) = \sum_{i=1}^{p} P(\omega_i) + \sum_{i=p+1}^{q} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{q} P(\omega_i) = P(A \cup B)$.
(2) Pour $B = \bar{A}$, on obtient : $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. □

Remarque *Plus généralement, par récurrence, on déduit de* **(1)** *que si* $A_1, \dots, A_n$ *sont des événements deux à deux incompatibles, alors :* $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.
Ce qui peut également s'écrire : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

On en déduit le théorème suivant.

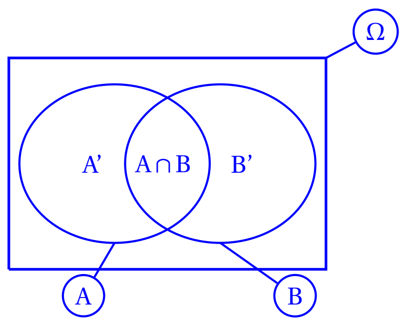
Théorème V.1.3 Théorème faible des probabilités totales
Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ est une partition [1] d'un événement A, alors :
$P(A) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$.



Théorème V.1.4
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω et A, B deux événements.
On a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Démonstration
Notons A' le complémentaire de $A \cap B$ dans A et B' le complémentaire de $A \cap B$ dans B.
On a : $A = (A \cap B) \cup A'$, avec $(A \cap B) \cap A' = \varnothing$;
donc : $P(A) = P(A \cap B) + P(A')$.
On a : $B = (A \cap B) \cup B'$, avec $(A \cap B) \cap B' = \varnothing$;
donc : $P(B) = P(A \cap B) + P(B')$.
Tout élément de $A \cup B$ est soit élément de A mais pas de B, soit élément de B mais pas de A soit élément des deux. $\{A', A \cap B, B'\}$ est donc une partition de $A \cup B$. On en déduit que :

$$P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \big(P(A') + P(A \cap B)\big) + \big(P(B') + P(A \cap B)\big) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



□

Exercice V.1.3. ***Une urne contient 15 boules, numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule et on désigne par N son numéro. On désigne respectivement par A et B les événements « N est pair » et « N est multiple de trois ».***
1. Déterminer la probabilité des événements A, B et $A \cap B$.
2. Calculer la probabilité des événements $\bar{A}$, $\bar{B}$ ***et*** $A \cup B$.

Solution ***1.*** *L'univers est :* $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15\}$ *;*
La boule est tirée au hasard on a donc équiprobabilité.
Pour tout événement élémentaire $\{\omega\}$, *on a donc :* $P(\omega) = \dfrac{1}{15}$ *;*

d'où : $P(A) = P(\{2;4;6;8;10;12;14\}) = \frac{7}{15}$ *;* $P(B) = P(\{3;6;9;12;15\}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$
et $P(A \cap B) = P(\{6;12\}) = \frac{2}{15}$.

***2.** On a :* $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{8}{15}$ *;* $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}$ *;*
et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{15} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}$. □

V.1.2.d Événements indépendants

DÉFINITION V.1.3

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
Deux événements A et B sont *indépendants* lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dans le cas contraire, A et B sont dits dépendants.

Exemples

***1.** Dans une classe de 36 élèves, on aimerait savoir si les élèves littéraires sont meilleurs en sport que les élèves non littéraires.*
Un élève est déclaré littéraire lorsqu'il a obtenu la moyenne en français, sportif lorsqu'il a obtenu la moyenne en éducation physique et sportive. Le tableau ci-joint récapitule les résultats de l'enquête menée dans cette classe.

	Littéraires	*Non littéraires*	*Total*
Sportifs	*18*	*6*	*24*
Non sportifs	*9*	*3*	*12*
Total	*27*	*9*	*36*

TABLE *V.2 – sportifs & littéraires*

On choisit au hasard un élève et on considère les événements suivants.

S : « l'élève est sportif »
L : « l'élève est littéraire »

On a : $P(S) = \frac{2}{3}$ *;* $P(L) = \frac{3}{4}$ *et* $P(S \cap L) = \frac{1}{2}$ *; donc :*

$$P(S \cap L) = P(S) \times P(L)$$

Les événements S et L sont indépendants.
Si on choisit un littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est : $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$.
Si on choisit un non littéraire au hasard, la probabilité pour qu'il soit sportif est encore : $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.
Dans cette classe, les littéraires ne sont ni plus ni moins sportifs que les non littéraires.

***2.** Une classe comprend 15 filles et 21 garçons.*
On demande des volontaires pour former une équipe de football mixte, on obtient les résultats ci-contre. On choisit un (ou une) élève au hasard dans la classe et on considère les événements F : « l'élève est une fille » et V : « l'élève est volontaire » .
On a : $P(F) = \frac{5}{12}$ *;* $P(V) = \frac{2}{3}$ *et* $P(V \cap F) = \frac{2}{9}$ *; donc :*

	Filles	*Garçons*	*Total*
Volontaires	8	16	24
Non volontaires	7	5	12
Total	15	21	36

TABLE *V.3 – Volontaires par genre*

$$P(F \cap V) \neq P(F) \times P(V)$$

Les événements F et V sont dépendants.
Si on choisit une fille au hasard, la probabilité pour qu'elle soit volontaire est : $\dfrac{8}{15}$.
Si on choisit un garçon au hasard, la probabilité pour qu'il soit volontaire est : $\dfrac{16}{21}$.

Plus généralement, on définit l'indépendance de n événements.

DÉFINITION V.1.4
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
n événements $A_1, \dots, A_n$ sont *indépendants* lorsque pour tout sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$ de $\{1 ; \dots ; n\}$, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} P(A_{i_k}).$$

Remarque *Les considérations précédentes permettent de calculer la probabilité de* $A \cap B$ *lorsque A et B sont des événements indépendants. Cette indépendance peut être signalée dans l'énoncé. Mais elle peut aussi découler des conditions de l'expérience ; ainsi, il y a indépendance entre les résultats :*
- *de tirages successifs avec remise ;*
- *de jets successifs d'un dé, ou d'une pièce de monnaie.*

Exercice V.1.4. ***On joue à pile ou face avec une pièce tordue où la probabilité d'obtenir face est*** $\dfrac{1}{3}$ ***et celle d'obtenir pile*** $\dfrac{2}{3}$***. On lance neuf fois cette pièce. On désigne par*** F_1 ***l'événement « obtenir face au 1^{er} lancer » puis*** F_2 ***…***
Quelle est la probabilité de l'événement $(F_1$ ***et*** F_2 ***et*** $F_9)$ ***?***

Solution *Les événements* F_1, F_2 *et* F_9 *sont indépendants donc :*

$$P(F_1 \text{ et } F_2 \text{ et } F_9) = P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_9) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

□

Exercice V.1.5. ***Un joueur de fléchettes dispose d'une cible carrée d'un mètre de côté. Il lance une fléchette, on suppose qu'il plante la fléchette dans la cible, mais n'importe où dans la cible. Ainsi la probabilité que la fléchette se plante dans une région R est l'aire, en mètre carré de cette région. Par abus de langage nous identifierons la région et l'événement correspondant. On considère les événements suivants. A ; B ; C ; D.***

1. Démontrer que les événements A, B, C et D sont deux à deux indépendants.

2. Les événements A, B, C sont-ils indépendants ?

3. Les événements A, B, C, D sont-ils indépendants ?

Solution 1. *Les aires des régions A, B, C, D représentent chacune la moitié de l'aire de la cible, donc :*

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$P(A) \times P(B) = P(A) \times P(C) = P(A) \times P(D) = P(B) \times P(C) = P(B) \times P(D) = P(C) \times P(D) = \frac{1}{4}$$

Les intersections sont définies par : $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cap D$; $B \cap C$; $B \cap D$; $C \cap D$.
Les aires de ces intersections représentent chacune le quart de l'aire de la cible aire ; donc :

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A \cap D) = P(B \cap C) = P(B \cap D) = P(C \cap D) = \frac{1}{4}$$

Les événements A, B, C et D sont donc deux à deux indépendants.

2. *On sait déjà que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont* *indépendants il ne reste plus qu'a comparer* $P(A) \times P(B) \times P(C)$ *avec* $P(A \cap B \cap C)$. *On a :* $P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{8}$.

$A \cap B \cap C$ *est la région :* ; *donc :* $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$.

Par conséquent les événements A, B, C sont indépendants.

3. *On sait déjà que les événements A, B, C, D sont deux à deux indépendants, pour savoir s'ils sont indépendants il ne reste plus qu'a savoir si, lorsqu'on en choisit trois ou lorsqu'on choisit les quatre, la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.*

D'après l'étude menée en ***1.*** *:* $A \cap D = B \cap D$ *; donc :* $A \cap B \cap D = A \cap D$ *; d'où :* $P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{4}$.

Or : $P(A) \times P(B) \times P(D) = \frac{1}{8}$.

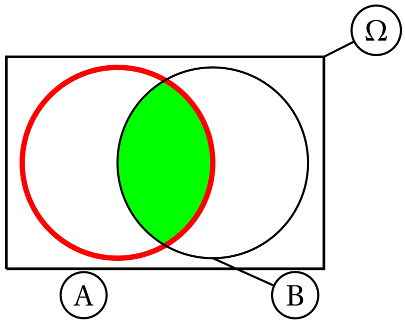
Les événements A, B, C, D sont donc dépendants. □

V.1.3 Probabilités conditionnelles

Dans cette partie, un univers Ω est muni d'une probabilité P.

V.1.3.a Introduction

Soit A et B deux événements ($P(A) \neq 0$). On cherche à connaître la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On appellera *probabilité de B sachant A* cette probabilité et on la notera : $P_A(B)$ ou $P(B|A)$.



Pour répondre à cette question, il suffit en fait de prendre A comme nouvel univers. La probabilité sur ce nouvel univers est notée P_A. On doit avoir : $P_A(A) = 1$; on choisit donc de définir, pour tout événement B, $P_A(B)$ par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Définition V.1.5 Probabilité conditionnelle

Soit A un événement de probabilité non nulle.

La probabilité sachant A, notée P_A, est la probabilité définie par : $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Exemples *Reprenons les exemples de la définition V.1.3 (événements indépendants) page 79.*

1. *On choisit un élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'il soit sportif ?*

Solution

$$P_L(S) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$$

□

On remarque que : $P_L(S) = P(S)$.

2. *On choisit une élève au hasard, sachant qu'il est littéraire, quelle est la probabilité pour qu'elle soit volontaire pour jouer au football ?*

Solution

$$P_F(V) = \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{2}{9} \times \frac{12}{5} = \frac{8}{15}.$$

□

On remarque que : $P_F(V) \neq P(V)$.

Remarque *Dans les exemples ci-dessus, les probabilités conditionnelles peuvent s'obtenir par lecture directs dans les tableaux V.2 et V.3 pages 79 et 79.*

Théorème V.1.5

Soit A et B deux événements tels que : $P(A) \neq 0$.

(1) A et B sont indépendants si et seulement si : $P_A(B) = P(B)$.

(2) $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

Démonstration

(1) $P_A(B) = P(B) \iff \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B) \iff P(A) \times P(B) = P(B \cap A)$.

(2) C'est une conséquence de la définition V.1.5. □

V.1.3.b Arbres pondérés

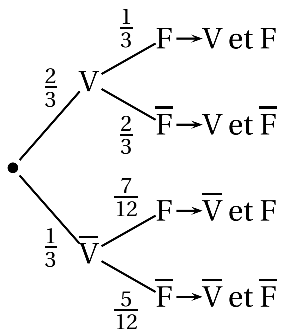
Pour schématiser une situation et effectuer rapidement les calculs demandés, on représente souvent la situation étudiée par un *arbre pondéré*.

L'arbre ci-contre représente le situation du tableau V.3 page 79. D'après ce tableau :

$P(V) = \dfrac{2}{3}$; $P_{\overline{V}}(F) = \dfrac{7}{12}$; $P(\overline{V} \cap \overline{F}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{5}{36}$.

Déterminer la probabilité des événements : $\overline{V} \cap \overline{F}$; $V \cap \overline{F}$; $V \cap F$ et $\overline{V} \cap F$.

Combien vaut la somme des probabilités des événements : $V \cap F$; $V \cap \overline{F}$; $\overline{V} \cap F$ et $\overline{V} \cap \overline{F}$.



Remarque *Un arbre pondéré est une représentation intuitive permettant une utilisation simplifiée du théorème V.1.5.*

V.1.3.c Théorème des probabilités totales

On se propose d'utiliser l'arbre pondéré ci-dessus pour déterminer P(F).

$\{V, \overline{V}\}$ est une partition de l'univers Ω, donc $\{V \cap F, \overline{V} \cap F\}$ est une partition de F. En utilisant le théorème faible des probabilités totales (théorème V.1.3 page 78) on en déduit que :

$$P(F) = P(V \cap F) + P(\overline{V} \cap F)$$

or :

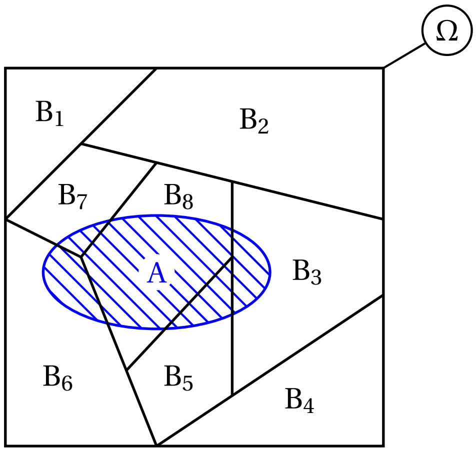
$$P(V \cap F) = P(V) \times P_V(F) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{36} \qquad \text{et} \qquad P(\overline{V} \cap F) = P(\overline{V}) \times P_{\overline{V}}(F) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{36}$$

donc :

$$P(F) = \frac{5}{12}.$$

Plus généralement, si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement A :
$\{B_1 \cap A, \dots, B_n \cap A\}$; est une partition de A et on a :

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \cdots + P(B_n \cap A).$$



On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME V.1.6 THÉORÈME DES PROBABILITÉS TOTALES

Si $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de l'univers Ω telle que pour tout i : $P(B_i) \neq 0$;
alors pour tout événement A :

$$P(A) = P(B_1) \times P_{B_1}(A) + \cdots + P(B_n) \times P_{B_n}(A).$$

V.1.3.d Exercice résolu

Exercice V.1.6. ***Un sac contient 5 billes blanches et 8 billes noires, indiscernables au touché. On tire successivement et sans remise trois billes.***

1. Décrire l'univers.

2. Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au troisième tirage.

4. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille blanche au deuxième tirage.

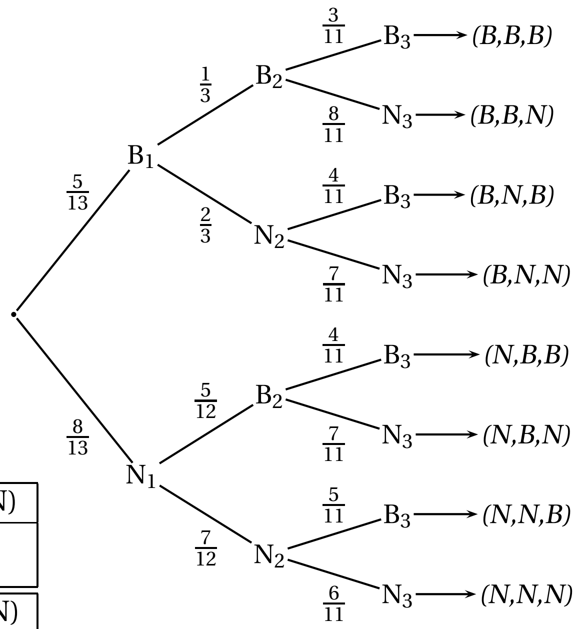
5. Déterminer la probabilité d'obtenir une bille noire au deuxième tirage et une bille blanche au troisième tirage.

6. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu au deuxième tirage une bille noire, sachant que la bille obtenue au troisième tirage était blanche.

Solution 1. *À chaque tirage on peut obtenir soit une bille blanche (B) soit une bille noire (N). L'univers est donc l'ensemble des 3-listes d'éléments $\{B, N\}$ où, par exemple, (B, N, N) représente l'éventualité : « tirer d'abord une bille blanche puis deux billes noires ».*

2. *Désignons par B_1 l'événement : « obtenir une bille blanche au 1er tirage » et définissons de même B_2, B_3, N_1, N_2 et N_3. Les billes sont indiscernables au touché, on a donc équiprobabilité à chaque tirage ; ce qui signifie qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une couleur est le quotient du nombre de billes de cette couleur par le nombre total de billes dans le sac.*

8 *billes noires ; donc :* $P(B_1) = \dfrac{5}{13}$ *et* $P(N_1) = \dfrac{8}{13}$.
Si B_1 *est réalisé il reste alors* 4 *billes blanches et* 8 *billes noires dans le sac ; d'où :* $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$ *et* $P_{B_1}(N_2) = \dfrac{2}{3}$.
En poursuivant ce raisonnement jusqu'à l'élimination de tous les cas possibles, on obtient l'arbre pondéré ci-contre dont on déduit par exemple que :
$P(B,N,N) = \dfrac{5}{13} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{11} = \dfrac{70}{429}$.
En procédant de même pour toutes les éventualités, on obtient l'arbre pondéré ci-contre d'où l'on tire le tableau ci-dessous.



Événement	(B,B,B)	(B,B,N)	(B,N,B)	(B,N,N)
Probabilité	$\dfrac{15}{429}$	$\dfrac{40}{429}$	$\dfrac{40}{429}$	$\dfrac{70}{429}$
Événement	(N,B,B)	(N,B,N)	(N,N,B)	(N,N,N)
Probabilité	$\dfrac{40}{429}$	$\dfrac{70}{429}$	$\dfrac{70}{429}$	$\dfrac{84}{429}$

3. *On a :* $B_3 = \{(B,B,B),(B,N,B),(N,B,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(B_3) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

4. *On a :* $B_2 = \{(B,B,B),(B,B,N),(N,B,B),(N,B,N)\}$ *; donc :*

$$P(B_2) = \frac{15+40+40+70}{429} = \frac{5}{13}.$$

5. *On a :* $N_2 \cap B_3 = \{(B,N,B),(N,N,B)\}$ *; donc :*

$$P(N_2 \cap B_3) = \frac{40+70}{429} = \frac{10}{39};$$

6.

$$P_{B_3}(N_2) = \frac{P(N_2 \cap B_3)}{P(B_3)} = \frac{10}{39} \times \frac{13}{5} = \frac{2}{3};$$

□

V.2 Variable aléatoire

V.2.1 Introduction

On lance deux dés bien équilibrés (un vert et un rouge) et on s'intéresse à la somme, X, obtenue.
L'univers est l'ensemble des couples d'éléments de $\{1;2;3;4;5;6\}$ donc : $\text{card}(\Omega) = 36$; les dés étant bien équilibrés, chaque événement élémentaire a la même probabilité : $\frac{1}{36}$. L'ensemble des valeurs possible de X est : $\{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$. On désigne par : $X = 2$; l'événement : « la somme obtenue est 2 ». Afin de mieux connaître la « loi de probabilité de X », on dresse le tableau ci-contre. L'événement : $X = 8$; est réalisé 5 fois, donc : $P(X = 8) = \frac{5}{36}$.
En procédant de même pour tout les valeurs possibles de X, on obtient le tableau ci-dessous.

$r \backslash v$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

DÉFINITION V.2.1
On appelle *variable aléatoire* X sur un univers Ω toute application de Ω vers $\mathbb{R}$.

Notations et vocabulaire
1. $X(\Omega)$ *est appelé* univers image *de* Ω *par X.*
2. *$(X = x_i)$ désigne l'événement « X prend la valeur x_i ».*
3. *$(X \leqslant a)$ désigne l'événement « X prend une valeur inférieure ou égal à a ».*

DÉFINITION V.2.2
Soit P une probabilité définie sur un univers Ω.
La *loi de probabilité* d'une variable aléatoire X sur Ω est l'application qui à toute valeur x_i prise par X associe $P(X = x_i)$.

Il est d'usage de représenter une loi de probabilité par un tableau et il recommandé de vérifier que : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

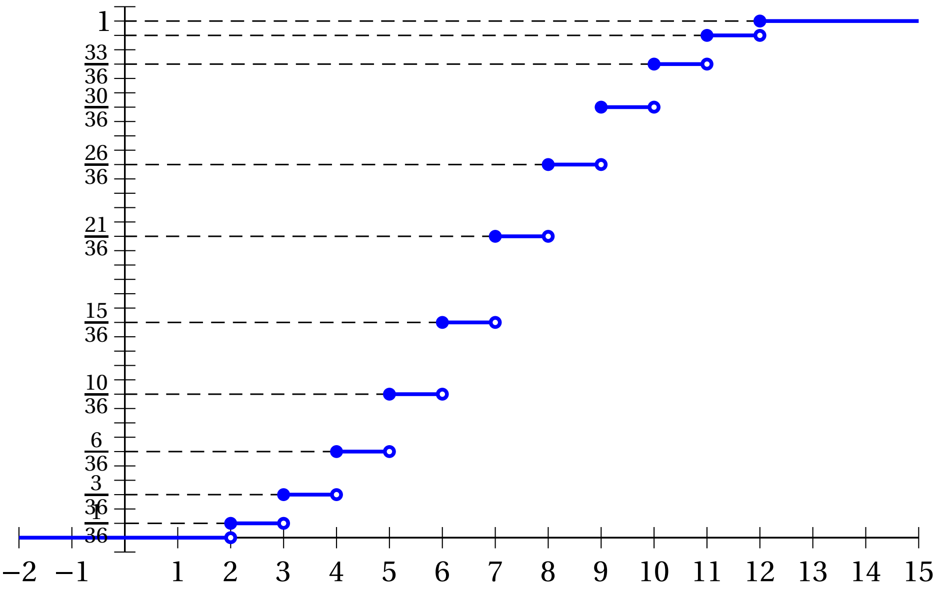
V.2.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

DÉFINITION V.2.3
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application F de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x).$$

Exemple *Reprenons l'exemple introductif ; F est définie par :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 2\,; \\ \frac{1}{36} & \text{, si } 2 \leqslant x < 3\,; \\ \frac{3}{36} & \text{, si } 3 \leqslant x < 4\,; \\ \frac{6}{36} & \text{, si } 4 \leqslant x < 5\,; \\ \frac{10}{36} & \text{, si } 5 \leqslant x < 6\,; \\ \frac{15}{36} & \text{, si } 6 \leqslant x < 7\,; \\ \frac{21}{36} & \text{, si } 7 \leqslant x < 8\,; \\ \frac{26}{36} & \text{, si } 8 \leqslant x < 9\,; \\ \frac{30}{36} & \text{, si } 9 \leqslant x < 10\,; \\ \frac{33}{36} & \text{, si } 10 \leqslant x < 11\,; \\ \frac{35}{36} & \text{, si } 11 \leqslant x < 12\,; \\ 1 & \text{, si } 12 \leqslant x. \end{cases}$$



Remarques

1. *F est une fonction en escalier, définie et croissante sur* $\mathbb{R}$.

2. *La représentation graphique de F est l'équivalent, en probabilité, de la courbe des fréquences cumulées croissantes en statistique.*

V.2.3 Caractéristiques d'une variable aléatoire

V.2.3.a Espérance mathématique

Un casino propose le jeu suivant : le joueur mise 16 euros, lance un dé bien équilibré et la banque lui rembourse le carré du nombre obtenu. Ce jeu est-il avantageux pour le joueur ?
Désignons par X le gain, en euros, du joueur pour une partie. S'il obtient 6 on lui rembourse 36, il a donc gagné 20 euros.
L'univers est : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5,\,6\}$;
l'univers image est donc :
$X(\Omega) = \{-15\,;-12\,;-7\,;0\,;9\,;20\}$.
Le dé étant bien équilibré, on a équiprobabilité sur l'univers et donc, ici, sur l'univers image ; on en déduit la loi de probabilité de X.

x_i	-15	-12	-7	0	9	20
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Sur un 600 parties un joueur réalisera en moyenne 100 fois chaque événement élémentaire. Le gain moyen par partie sera donc :

$$\frac{1}{600}\big(100\times(-15)+100\times(-12)+100\times(-7)+100\times 0+100\times 9+100\times 20\big) = -\frac{5}{6}$$

On peut donc espérer perdre en moyenne $\frac{5}{6}$ € par partie.

On remarque que : $\frac{5}{6} = -15\times\frac{1}{6} - 12\times\frac{1}{6} - 7\times\frac{1}{6} + 0\times\frac{1}{6} + 9\times\frac{1}{6} + 20\times\frac{1}{6}$.
Plus généralement, on a la définition suivante.

DÉFINITION V.2.4

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, \dots, p_n$.
On appelle *espérance mathématique* de X le nombre réel, noté E(X), défini par :

$$\mathrm{E(X)} = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Remarques

1. *L'espérance mathématique est l'équivalent, en probabilité, de la moyenne en statistique.*

2. *L'espérance est donc une caractéristique de position.*

3. *Pour une variable aléatoire constante* $\omega \mapsto \lambda$, *(*$x_1 = \dots = x_n = \lambda$*) on a :* $\mathrm{E}(\lambda) = \lambda$.

4. *Pour calculer l'espérance d'un variable aléatoire, il peut-être commode de reprendre la tableau de la loi de probabilité de la façon suivante.*

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	*Total*
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1
$x_i p_i$	$x_1 p_1$	x_2	$\cdots$	$x_n p_n$	*E(X)*

Exercice V.2.1. ***Calculer l'espérance de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ V.2.1 page 85).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$n\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$	E(X) = 7

L'espérance mathématique de X est donc : 7. □

V.2.3.b Variance, écart type

La variance et l'écart type sont des nombres réels positifs qui traduisent la façon dont sont dispersées les valeurs d'une variable aléatoire autour de son espérance ; plus la variance et l'écart type seront grands plus les valeurs seront dispersées. Ce sont des caractéristiques de dispersions. Dans une classe un devoir a été donné dans deux matières, on choisit un élève au hasard et on désigne par X sa note dans la première matière et par Y sa note dans la seconde matière. Les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y sont données dans les tableaux ci-contre.

n	10
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = n)$	1

n	0	20
$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Dans les deux cas l'espérance est 10 et pourtant les résultats de la classe dans les deux matières sont, en un certain sens, opposés : dans la première tous les élèves ont 10 et dans la seconde les notes sont réparties aux extrêmes.

DÉFINITIONS V.2.5

Soit X une variable aléatoire.

(1) On appelle *variance* de X le nombre réel, noté V(X), défini par : $\mathrm{V(X)} = \mathrm{E}\Big(\big(\mathrm{X} - \mathrm{E(X)}\big)^2\Big)$.

(2) On appelle *écart type* de X le nombre réel, noté σ(X), défini par : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}}$.

Remarques

1. *La variance est donc la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.*

2. *La variance étant une moyenne de carrés, on a introduit sa racine carrée pour mieux rendre compte de la dispersion.*

3. *La définition de la variance n'est pas très pratique pour les calculs.*

V.2.3.c Propriétés de l'espérance et de la variance

THÉORÈME V.2.1
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et λ un réel.
(1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
(2) $E(X+\lambda) = E(X) + \lambda$;
(3) $E(\lambda X) = \lambda E(X)$;
(4) $E(X - E(X)) = 0$;
(5) $V(X+\lambda) = V(X)$;
(6) $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Démonstration Notons ω_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) les éventualités et p_i les probabilités des événements élémentaires associés.
(1) On a : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) p_i$ et $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i) p_i$.
De même : $E(X+Y) \sum_{i=1}^{n} (X+Y)(\omega_i) p_i = \sum_{i=1}^{n} \left(X(\omega_i) p_i + Y(\omega_i) p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) p_i + \sum_{i=1}^{n} Y(\omega_i) p_i = E(X) + E(Y)$.
(2) On déduit **(2)** de **(1)** en prenant pour Y la variable aléatoire constante $\omega \mapsto \lambda$.
(3) $E(\lambda X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda X(\omega_i) p_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} X(\omega_i) p_i = \lambda E(X)$.
(4) D'après **(2)** (avec $\lambda = -E(X)$) : $E(X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$.
(5) $V(X+\lambda) = E\left(\left(X+\lambda - E(X+\lambda)\right)^2\right) = E\left(\left(X+\lambda - E(X) - \lambda\right)^2\right) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = V(X)$.
(6) $V(\lambda X) = E\left(\left(\lambda X - E(\lambda X)\right)^2\right) = E\left(\left(\lambda X - \lambda E(X)\right)^2\right) = E\left(\lambda^2\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \lambda^2 V(X)$. □

Remarques
1. *En pratique toutes ces propriétés sont naturelles, afin de les illustrer prenons pour univers une classe où un devoir a été donné ; la moyenne de la classe est* 5 *et la variance* 3*. On considère l'expérience aléatoire suivante : on choisit au hasard un élève et désigne par X sa note. X est une variable aléatoire et on a :* $E(X) = 5$ *et* $V(X) = 3$.

Si on décide d'ajouter 1 *point à chaque élève, alors la moyenne augmentera de* 1 *point :* $E(X+1) = E(X) + 1 = 6$.
En revanche le fait d'ajouter 1 point à chaque élève ne changera pas la façon dont les notes sont réparties autour de la moyenne, c'est-à-dire : $V(X+1) = V(X)$.

Si on décide de multiplier par 2 *la note de chaque élève, alors la moyenne sera multipliée par* 2 *elle aussi :* $E(2X) = 2E(X) = 10$.
De plus en multipliant par 2 *les notes, on multiplie également par* 2 *les écarts à la moyenne et donc par 4 leur carré ; par conséquent :* $V(2X) = 4V(X)$.
2. *Pour donner un sens intuitif à la propriété **(1)** gardons l'exemple de la classe. Un devoir constitué d'un exercice sur* 7 *points et d'un problème sur* 13 *points à été donné. Cette fois-ci X désigne la note obtenue à l'exercice et Y la note obtenue au problème. La note obtenue au devoir est alors* $X+Y$. *La moyenne de la classe au devoir est la somme des moyennes de l'exercice et du problème :* $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.
3. *On déduit des deux dernières propriétés que :* $\sigma(X+\lambda) = \sigma(X)$ *et* $\sigma(\lambda X) = |\lambda|\sigma(X)$.
4. *On déduit des propriétés **(1)** et **(3)** que pour tous réels* α, β *; on a :* $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
On dit que l'espérance est linéaire.

D'après le théorème V.2.1 l'espérance de la somme de deux variables aléatoires est la somme des espérances. Il est donc naturelle de se demander s'il n'en est pas de même pour le produit. Prenons un exemple.

On dispose de deux rectangles, les dimensions de l'un sont 2 par 3 et celles de l'autre sont 4 par 5. On choisit un rectangle au hasard et on désigne par ℓ sa largeur et L son longueur. L'aire est donc la variable aléatoire $L\ell$.
La moyenne des largeurs est : $E(\ell) = 3$.
La moyenne des longueurs est : $E(L) = 4$.
Les aires sont 6 et 20 donc : $E(L\ell) = 13$.
On constate, ici, que : $E(L\ell) \neq E(L) \times E(\ell)$.

Nous avons précédemment remarqué que la définition de la variance ne conduisait pas à un calcul aisé. le théorème suivant remédie à cette carence.

THÉORÈME V.2.2 FORMULE DE KÖNIG [2]

Soit X une variable aléatoire. On a : $V(X) = E\big(X^2\big) - E^2(X)$.

Démonstration Par définition :

$$V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) = E\big(X^2 - \underbrace{2E(X)}_{\alpha}X + \underbrace{E^2(X)}_{\beta}\big).$$

Donc par linéarité et d'après le propriété **(2)** du théorème V.2.1 :

$$V(X) = E\big(X^2\big) - 2E(X)E(X) + E^2(X)\,;$$

d'où l'on tire : $V(X) = E\big(X^2\big) - E^2(X)$. □

Exercice V.2.2. ***Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire de l'exemple introductif (§ V.2.1 page 85).***

Solution

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	*Total*
$P(X=n)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$nP(X=n)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{10}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{21}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{18}{18}$	$\frac{15}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{6}{18}$	$E(X)=7$
$n^2P(X=n)$	$\frac{2}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{50}{18}$	$\frac{90}{18}$	$\frac{147}{18}$	$\frac{160}{18}$	$\frac{162}{18}$	$\frac{150}{18}$	$\frac{121}{18}$	$\frac{72}{18}$	$E(X^2)=\frac{329}{6}$

La variance de X est donc : $V(X) = E\big(X^2\big) - E^2(X) = \dfrac{329}{6} - 49 = \dfrac{35}{6}$.

On en déduit l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{\dfrac{35}{6}}$. □

V.2.4 Variables aléatoires indépendantes

V.2.4.a Loi produit

DÉFINITION V.2.6

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.
La *loi couple* (X,Y) est l'application de $X \times Y$ vers $[0\,;1]$ qui à tout couple (x_i, y_j) associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$.

Exercice V.2.3. ***On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :***

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \textit{, si } \omega \textit{ est pair;} \\ 1 & \textit{, si } \omega \textit{ est impair.} \end{cases} \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 5 & \textit{, si } \omega \textit{ est un nombre premier;} \\ 10 & \textit{, si } \omega \textit{ n'est pas premier.} \end{cases}$$

2. KÖNIG, Johann Samuel (1712–1757)

Déterminer la loi couple (X, Y).

Solution *Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau V.4. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi couple (X, Y) est donc déterminée par le tableau V.5. Pour construire ce dernier, on utilise le tableau V.4 :* $(X = 1 \text{ et } Y = 5) = \{3;5\}$ *; donc :* $P(1;5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

ω	1	2	3	4	5	6
X(ω)	1	0	1	0	1	0
Y(ω)	10	5	5	10	5	10
(X, Y)(ω)	(1;10)	(0;5)	(1;5)	(0;10)	(1;5)	(0;10)

TABLE V.4 – *Images de Ω par X, Y et (X, Y).*

X \ Y	5	10
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

TABLE V.5 – *Loi couple de (X, Y).*

□

Remarques

1. *La loi couple est aussi appelée* loi de probabilité conjointe *ou* loi de probabilité simultanée *ou encore* loi de probabilité produit *; les probabilités contenues dans le tableau V.5 sont alors appelées* probabilités conjointes *ou* probabilités simultanées.

2. *Dans le tableau V.5 si on ajoute une ligne et une colonne « Total », on obtient le tableau V.6 où les lois de probabilités des variables aléatoires X et Y apparaissent dans les marges. Ces lois sont alors appelées* lois marginales

X \ Y	5	10	Total
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X = 0) = \frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$P(X = 0) = \frac{1}{2}$
Total	$P(Y = 5) = \frac{1}{2}$	$P(Y = 10) = \frac{1}{2}$	1

TABLE V.6 – Lois marginales.

V.2.4.b Variables aléatoires indépendantes

Exemples

1. *Reprenons l'exemple du § V.2.4.a. D'après le tableau V.6 on constate que les événements* $(X = 0)$ *et* $(Y = 5)$ *sont dépendants ; en effet :* $P(X = 0 \text{ et } Y = 5) = \frac{1}{6}$ *et* $P(X = 0) \times P(Y = 5) = \frac{1}{4}$.
On dit alors que les variables X et Y sont dépendantes.

2. *On lance un dé bien équilibré et on considère les variables aléatoires X et Y définies par :*

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & , \textit{si } \omega \textit{ est pair;} \\ 1 & , \textit{si } \omega \textit{ est impair.} \end{cases}$$

ω	1	2	3	4	5	6
$X(\omega)$	1	0	1	0	1	0
$Y(\omega)$	5	5	10	10	10	10
$(X,Y)(\omega)$	$(1;5)$	$(0;5)$	$(1;10)$	$(0;10)$	$(1;10)$	$(0;10)$

TABLE V.7 – *Images de Ω par X, Y et (X, Y)*

$$Y(\omega) = \begin{cases} 5 & , \textit{si } \omega \leqslant 2; \\ 10 & , \textit{si } 2 < \omega. \end{cases}$$

X \ Y	5	10	*Total*
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=0) = \frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$P(X=1) = \frac{1}{2}$
Total	$P(Y=5) = \frac{1}{3}$	$P(Y=10) = \frac{2}{3}$	1

TABLE V.8 – *Loi couple de (X, Y).*

Les images de l'univers Ω par X, Y et (X, Y) sont données dans le tableau V.7. On sait de plus que le dé est bien équilibré, on a donc équiprobabilité sur Ω. La loi conjointe et les lois marginales sont déterminée par le tableau V.8.
On constate que chaque probabilités conjointe est le produit des probabilités marginales associées ; par exemple : $P(X=0 \textit{ et } Y=10) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = P(X=0) \times P(Y=10)$.
On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

DÉFINITION V.2.7
Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.
Les variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Remarques

1. *La condition d'indépendance peut s'écrire également, pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$:*

$$P\left(X = x \textit{ et } Y = y\right) = P(X = x) \times P\left(Y = y\right)$$

ou encore, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P(X = X(\omega) \textit{ et } Y = Y(\omega)) = P(X = X(\omega)) \times P(Y = Y(\omega))$$

2. *Deux variables aléatoires sont indépendantes si et seulement si le tableau de leur loi conjointe est un tableau de proportionnalité.*

THÉORÈME V.2.3
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers Ω et $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, \cdots, y_q\}$ leurs univers images respectifs.
(1) $E(XY) = E(X) \times E(Y)$.
(2) $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration Le formalisme utilisé dans cette démonstration n'est pas au programme de terminale, c'est démonstration peut donc être omise en première lecture et est de toute façon réservée à des lecteurs motivés.

(1)
$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X)\times \mathrm{E}(Y) &= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathrm{P}(X=x)\right)\times \mathrm{E}(Y)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x\,\mathrm{P}(X=x)\times \mathrm{E}(Y)\right)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[x\,\mathrm{P}(X=x)\times \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathrm{P}(Y=y)\right]\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[\sum_{y\in Y(\Omega)} \left(x\,\mathrm{P}(X=x)\times y\,\mathrm{P}(Y=y)\right)\right]\\
&= \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} \left[xy\,\mathrm{P}(X=x \text{ et } Y=y)\right]\\
&= \mathrm{E}(XY)
\end{aligned}$$

(2) **(2)** se déduit de **(1)** en utilisant la linéarité de l'espérance et la formule de König.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X+Y) &= \mathrm{E}\left((X+Y)^2\right)-\left(\mathrm{E}(X+Y)\right)^2 && \text{(formule de König)}\\
&= \mathrm{E}\left(X^2+Y^2+2XY\right)-\left(\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)\right)^2\\
&= \mathrm{E}\left(X^2+Y^2+2XY\right)-\left(\mathrm{E}^2(X)+\mathrm{E}^2(Y)+2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\right)^2\\
&= \mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(Y^2)+2\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}^2(X)-\mathrm{E}^2(Y)-2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) && \text{(linéarité de l'espérance)}\\
&= \mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}^2(X)+\mathrm{E}(Y^2)-\mathrm{E}^2(Y) && \text{(d'après \textbf{1})}\\
&= \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y) && \text{(formule de König)}
\end{aligned}$$

□

V.3 Lois de probabilités discrètes

V.3.1 Loi binomiale

V.3.1.a Schéma de Bernoulli

DÉFINITION V.3.1

On appelle *épreuve de Bernoulli* une épreuve à deux issues possibles.

Exemple *On lance un dé bien équilibré et on cherche à faire un* 1*. Désignont par S l'événement : « obtenir* 1 *» ; et par* $\overline{S}$ *l'événement contraire. On a ici :* $\mathrm{P}(S)=\dfrac{1}{6}$ *et* $\mathrm{P}\left(\overline{S}\right)=\dfrac{5}{6}$.

Remarque *Il est d'usage d'appeler succès l'issue recherchée et de la noter S.*

DÉFINITION V.3.2

On appelle *expérience* ou *schéma de Bernoulli* la répétition n fois, de façon indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

V.3.1.b Loi binomiale

DÉFINITION V.3.3

On appelle *loi binomiale* de paramètres n et p la loi de probabilité de la variable aléatoire désignant le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli où l'épreuve de Bernoulli a été répétée n fois et où la p désigne la probabilité de succès à une épreuve.

Notations et vocabulaire *Cette loi de probabilité est notée :* $\mathscr{B}(n,p)$.

Exemple *Reprenons le jeu de dés où il faut faire un as. On lance quatre fois le dé et on et on désigne par X le nombre de succès. la loi de probabilité de X est la loi binomiale de paramètres* 4 *et* $\dfrac{1}{6}$*. Déterminons la probabilité de l'événement* $(X=2)$.

On a : $(X=2)=\{(S,S,\bar{S},\bar{S}),(S,\bar{S},\bar{S},S),(S,\bar{S},S,\bar{S}),(\bar{S},S,S,\bar{S}),(\bar{S},S,\bar{S},S),(\bar{S},\bar{S},S,S)\}$.
Considérons les événements S_1, $\bar{S}_1$, ..., S_4, $\bar{S}_4$ *où, par exemple,* S_3 *désigne l'événement : « obtenir un succès au troisième lancé ». On a alors :* $\{(S,S,\bar{S},\bar{S})\}=S_1\cap S_2\cap\bar{S}_3\cap\bar{S}_4$. *Les résultats des différents lancés sont indépendants donc :*

$$\begin{aligned}
P(S,S,\bar{S},\bar{S}) &= P(S_1\cap S_2\cap\bar{S}_3\cap\bar{S}_4)\\
&= P(S_1)\times P(S_2)\times P(\bar{S}_3)\times P(\bar{S}_4)\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\\
&= \frac{25}{6^4}
\end{aligned}$$

On démontre de même que les quatre événements élémentaires qui constituent l'événement $(X=2)$ *ont tous pour probabilité* $\frac{25}{6^4}$ *; on déduit que :* $P(X=2)=4\times\frac{25}{6^4}=\frac{25}{324}$.

plus généralement, dans la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, la probabilité d'échec à une épreuve est : $q=1-p$. Considérons l'événement $(X=k)$ où $0\leqslant k\leqslant n$. pour réaliser un tel événement, il faut obtenir k succès et $n-k$ échecs. On peut donc choisir les k épreuves parmi n où on aura un succès et pour les $n-k$ épreuves restantes on aura un échec. Il y a donc $\binom{n}{k}$ éventualités qui réalisent l'événement. De plus chaque événement élémentaire inclus dans l'événement $(X=k)$ a pour probabilité : p^kq^{n-k} ; on en déduit que : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

THÉORÈME V.3.1

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la loi binomiale de paramètres n et p.

(1) Pour tout entier k tel que : $0\leqslant k\leqslant n$; on a :$P(X=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

(2) $E(X)=np$.

(3) $V(X)=npq$.

Démonstration **(1)** La propriété **(1)** a été démontrée dans l'étude ci-dessus.

(2) Calculons E(X). Par définition :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k} && \text{, car pour } k=0 \text{ le terme est nul}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^kq^{n-k}\\
&= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} && \text{, posons : } i=k-1\\
&= np\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{i!\big((n-1)-i\big)!}p^iq^{(n-1)-i}\\
&= np(p+q)^{n-1} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= np
\end{aligned}$$

(3) Calculons V(X). On a :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2)-E^2(X) && \text{, par le formule de König}\\
&= E(X^2-X)+E(X)-E^2(X) && \text{, par linéarité de l'espérance}\\
&= E\big(X(X-1)\big)+np-n^2p^2 && \text{, d'après } \textbf{(2)}
\end{aligned}$$

On a de plus :

$$
\begin{aligned}
E\big(X(X-1)\big) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, par définition de } \mathscr{B}(n,p)\\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} && \text{, car les deux premiers termes de la somme sont nuls.}\\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!}p^k q^{n-k}\\
&= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\big((n-2)-(k-2)\big)!}p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} && \text{,posons : } i=k-2\\
&= (n^2-n)p^2\sum_{i=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{i!\big((n-2)-i\big)!}p^{i} q^{(n-2)-i}\\
&= (n^2-n)p^2(p+q)^{n-2} && \text{, d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= n^2p^2-np^2
\end{aligned}
$$

On en déduit que : $V(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq.$ □

Remarque *En utilisant la formule du binôme de Newton, on vérifie que la somme des probabilités de la loi binomiale est 1.*

Chapitre VI

Géométrie dans l'espace

Bien souvent les propriétés et les concepts qui seront étudiés dans ce chapitre étendent à l'espace des propriétés et des concepts bien connus dans le plan.
Tous les théorèmes de géométrie plane sont applicables dans tout plan de l'espace.

VI.1 Rappels

VI.1.1 Les vecteurs de l'espaces

VI.1.1.a Définition

Comme dans le plan, un vecteur de l'espace est déterminé par sa direction, son sens et sa norme. Ainsi deux vecteurs non nuls sont égaux si, et seulement, si ils ont même direction, même sens et même norme.

Remarques

1. *Soit A, B, C, D quatre points. Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont égaux si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).*

2. *Pour tout point A et tout vecteur* $\vec{u}$*, il existe un unique point B tel que :* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *.*

VI.1.1.b Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

VI.1.1.c Opérations sur les vecteurs

Théorème VI.1.1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace et tous réels λ et λ', on a :

(1) $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$;

(2) $(\lambda+\lambda')\,\vec{u} = \lambda\vec{u}+\lambda'\vec{u}$;

(3) $(\lambda\times\lambda')\,\vec{u} = \lambda(\lambda'\vec{u})$;

(4) $\lambda\vec{u} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{0}.$

Pour construire la somme, $\vec{u}+\vec{v}$, de deux vecteurs non colinéaires ; on utilise la règle du parallélogramme :

- on choisit un point quelconque A ;
- on place les points B et D tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$;

– on désigne par C le point d'intersection de la parallèle à (AD) issue de B et de la parallèle à (AB) issue de D.

Le quadrilatère ABCD ainsi construit est un parallélogramme (les côté opposés sont parallèles) et on a :

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

VI.1.1.d Vecteurs colinéaires

Étymologie du mot colinéaire : co (même) linéaire (ligne).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On se donne un point, O, et on introduit les points A et B tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que les points O, A, B sont alignés.

En pratique un utilise la définition algébrique équivalente ci-dessous.

DÉFINITION VI.1.1

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que : $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ ou $\vec{u}=\lambda\vec{v}$.

THÉORÈME VI.1.2

(1) Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

(2) Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont la même direction.

Remarques

1. *On retiendra que deux vecteurs colinéaires sont deux vecteurs tels que l'un est combinaison linéaire de l'autre.*

2. *Plus généralement, des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont colinéaires si, et seulement si, il en existe un parmi eux qui permette de tous les engendrer par combinaisons linéaires. Par exemple, si $\vec{u}_n \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que : $\forall i \in [\![1\,;n-1]\!],\quad \vec{u}_i=\lambda_i\vec{u}_n$.*

3. *Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ n vecteurs, O un point et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ les points tels que :*
$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\quad \overrightarrow{OA}_i=\vec{u}_i$.
Les vecteurs$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont colinéaires si, et seulement si, les points O, $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont alignés.

VI.1.1.e Vecteurs coplanaires

Étymologie du mot coplanaire : co (même) planaire (plan).

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. On se donne un point, O, et on introduit les points A, B et C tels que : $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que les points O, A, B, C sont coplanaires (dans un même plan).

En pratique un utilise la définition algébrique ci-dessous.

DÉFINITION VI.1.2

Des vecteurs sont dits coplanaires lorsque deux d'entre eux permettent d'engendrer les autres par combinaisons linéaires.

Remarques

1. *Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours coplanaires.*

2. *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.*
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

3. *Plus généralement, soit $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ des vecteurs tels que $\vec{u}_{n-1}$ et $\vec{u}_n$ ne sont pas colinéaires. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des couples de réels $(\alpha_1;\beta_1)$, …, $(\alpha_{n-2};\beta_{n-2})$ tels que : $\forall i \in [\![1;n-2]\!]$, $\quad \vec{u}_i = \alpha_i\vec{u}_{n-1} + \beta_i\vec{u}_n$.*
4. *Soit $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ n vecteurs, O un point et A_1, …, A_n les points tels que :*
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}_i = \vec{u}_i$.
Les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ sont coplanaires si, et seulement si, les points O, A_1, …, A_n sont coplanaires.

VI.1.2 Des droites, des plans et des sphères

VI.1.2.a Déterminations d'une droite

Dans l'espace, une droite peut être déterminée de différentes manières.

Par deux points distincts : les points A et B déterminent la droite (AB).

Par un point et un vecteur directeur : il existe une droite et une seule passant par un point A et dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$. La droite est alors l'ensemble des points M tels qu'il existe un réel t, tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$. Le nombre t est appelé *paramètre* du point M.

Par un point et une droite parallèle : il existe une droite et une seule passant par un point A et parallèle à une droite (d) donnée.

Par deux plans sécants : l'intersection de plans sécants est une droite.

VI.1.2.b Déterminations d'un plan

Un plan peut être déterminé de différentes manières.

Par trois points distincts non alignés : les points A, B et C déterminent le plan (ABC).

Par un point et un vecteur normal : il existe un plan et un seul passant par un point A et normal à un vecteur non nul $\vec{n}$. Le plan est alors l'ensemble des points M, tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$.

Par deux droites strictement parallèles : il existe un plan et un seul incluant deux droites strictement parallèles données.

Par deux droites sécantes : il existe un plan et un seul incluant deux droite sécantes données.

Par un point et deux vecteurs non colinéaires : il existe un plan et un seul passant par un point A et dirigée par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le plan est alors l'ensemble des points M tels qu'il existe deux réels k et t, tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = k\vec{u} + t\vec{v}$.

Par un point et un plan parallèle : il existe un plan et un seule passant par un point A et parallèle à un plan (p) donné.

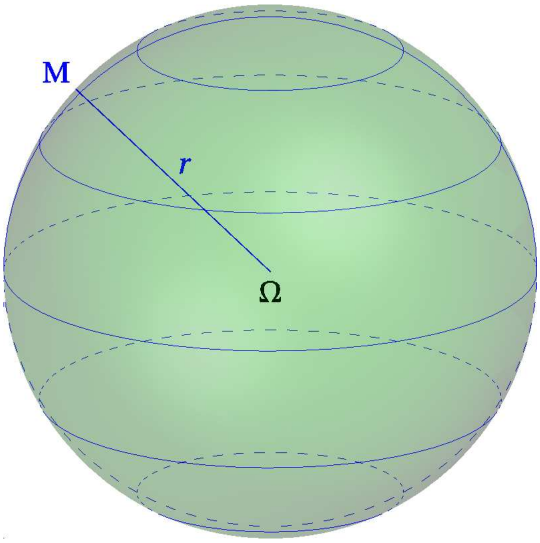
Par un point et une droite perpendiculaire : il existe un plan et un seule passant par un point A et perpendiculaire à une droite (d) donnée.

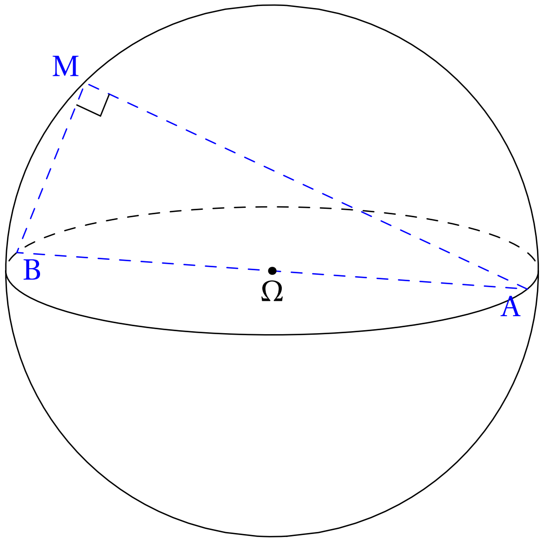
VI.1.2.c Déterminations d'une sphère

Une sphère peut être déterminée de différentes manières.

Par son centre et son rayon : La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M tels que : $\Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2$.

Par un diamètre : La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 0$.





VI.1.2.d Positions relatives

Dans les listes suivantes, chaque cas envisagé exclu les autres.

Position relatives de deux droites D et D′ :

- D et D′ sont confondues ;
- D et D′ sont strictement parallèles [1] ;
- D et D′ sont sécantes ;
- D et D′ sont non coplanaires.

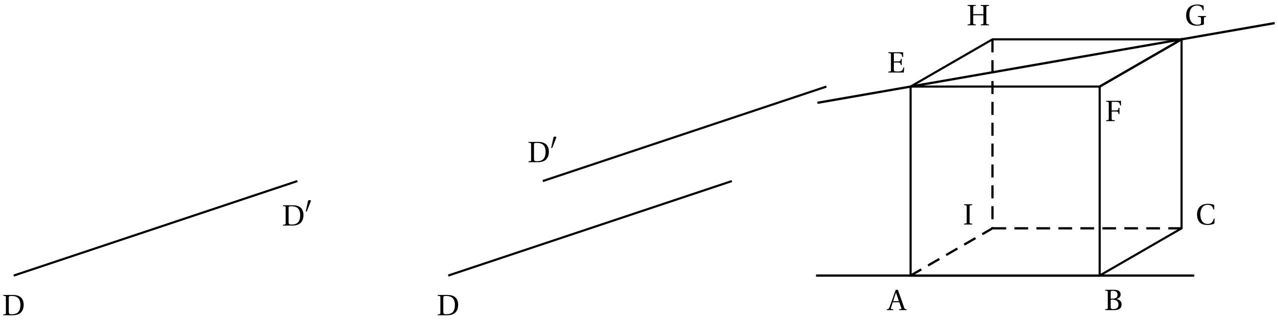


FIGURE VI.1 – Positions relatives de deux droites.

Remarques

1. *Deux droites parallèles ou sécantes sont coplanaires.*

2. *Pour démontrer que deux droites D et* D′ *sont non coplanaires, il suffit de démontrer que D est incluse dans un plan, P, sécant à* D′ *tel que le point d'intersection de P et de* D′ *ne soit pas un point de D.*

Position relatives de deux plans P et P′ :

- P et P′ sont confondus ;
- P et P′ sont strictement parallèles ;
- P et P′ sont sécants (leur intersection est alors une droite).

1. Strictement parallèles siginifie parallèles et disjointes.

Position relatives d'une droite D et d'un plan P :

- D est incluse dans P ;
- D est strictement parallèle à P ;
- D est sécante à P.

VI.1.2.e Directions

La direction d'une droite D est l'ensemble des droites de l'espace qui sont parallèles à D.
Ainsi deux droites parallèles sont deux droites qui ont la même direction.
De même, la direction d'un plan P est l'ensemble des plans de l'espace qui sont parallèles à P.
Ainsi deux plans parallèles sont deux plans qui ont la même direction.
L'orthogonalité instaure une relation de dualité entre les directions de droites et les directions de plans. En effet, la direction orthogonale d'une direction de droite est une direction de plan, et réciproquement. Par exemple l'orthogonale de la direction horizontale (direction de plan) est la direction verticale (direction de droite).

VI.1.2.f Parallélisme et orthogonalité

Dans ce paragraphe, les noms en « D » désignent des droites et ceux en « P » désignent des plans. Le symbole « $\perp$ » reliera des ensembles orthogonaux[2]. Le lexique ci-dessous précise la signification des relations de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace dans l'ensemble des droites et des plans.

$D \parallel D'$: Les droites D et D' ont la même direction.

$P \parallel P'$: Les plans P et P' ont la même direction.

$P \parallel D$: Le plan P contient une droite D' telle que : $D \parallel D'$.

$P \perp D$: Le plan P et la droite D ont des directions orthogonales.

$P \perp P'$: Le plan P contient une droite D' telle que : $P \perp D'$.

$D \perp D'$: La droite D est incluse dans un plan P tel que : $P \perp D'$.

THÉORÈME VI.1.3

(1) Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.
(2) Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles.
(3) Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.
(4) Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.
(5) Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthognoale à tout plan parallèle à ce plan.
(6) Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthognoale à toute droite parallèle à ce plan.
(7) Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est perpendiculaire à ce plan.
(8) Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.

2. Deux ensembles perpendiculaires sont deux ensembles orthogonaux et sécants. Par exemple, dans le plan deux droites orthogonales sont toujours sécantes ; ont dit qu'elles sont perpendiculaires. En revanche si on considère deux droites non coplanaires, l'une horizontale et l'autre verticale ; alors ces deux droites sont orthogonales mais ne sont pas perpendiculaires.

VI.1.2.g Projections orthogonales

Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite D est le point d'intersection, H, de D avec le plan perpendiculaire à D issu de M. $\overrightarrow{MH}$ est alors orthogonal à tout vecteur de D.

Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point d'intersection, H, de P avec ldroite orthogonale à P issu de M. $\overrightarrow{MH}$ est alors orthogonal à tout vecteur de P.

VI.1.3 Exercices

VI.1.a. Sur le cube de la figure VI.1, démontrer que les droites (AB) et (EG) sont non coplanaires.

VI.1.b. Pourquoi la direction verticale est-elle une direction de droite et non une direction de plan ?

VI.1.c. Pourquoi la direction horizontale est-elle une direction de plan et non une direction de droite ?

VI.1.d. Dans l'espace, deux droites parallèles à un même plan sont-elles nécessairement parallèles ?

VI.1.e. Dans l'espace, deux plans parallèles à une même droite sont-ils nécessairement parallèles ?

VI.1.f. Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième sont-elles nécessairement parallèles ?

VI.1.g. Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième sont-elles nécessairement orthogonales ?

VI.1.h. Dans l'espace, deux plans orthogonaux à un même troisième sont-ils nécessairement parallèles ?

VI.1.i. Dans l'espace, deux plans orthogonaux à un même troisième sont-ils nécessairement orthogonaux ?

VI.1.j. Démontrer le théorème VI.1.3.

VI.1.k. Soit A et B deux points de $\mathscr{E}$ et I est le milieu de [AB]. Le plan médiateur de [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et B.
Démontrer que le plan médiateur de [AB] est le plan perpendiculaire à (AB) issu de I.

VI.1.l. On donne un plan (P), une droite (D) et trois points A, H, H′ tels que :

- (P) et (D) sont sécants en un point, I ;
- A n'est ni un point de (P) et ni un point de (D) ;
- H est le projeté orthogonal de A sur (D) ;
- H′ est le projeté orthogonal de A sur (P) ; le point I est distinct de H et de H′ ;
- le plan incluant (D) et A n'est pas perpendiculaire au plan (P).

1. Démontrer que les points H et H′ sont distincts.

2. Démontrer que la droite (D) n'est pas perpendiculaire au plan (P).

3. Démontrer que les points A, H, H′ et I sont non coplanaires.

4. Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre AHH′I.

VI.2 Outils du calcul analytique

VI.2.1 Repérage

VI.2.1.a Introduction

Un repère de l'espace, généralement noté $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, est la donnée d'un point, O, appelé origine et d'un triplet de vecteurs non coplanaires, $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, appelé base. Tout vecteur de l'espace peut alors s'exprimer comme combinaison linéaire unique de ces trois vecteurs et les coefficients, x, y, z sont les coordonnées du vecteur et sont respectivement appelés *abscisse*, *ordonnée* et *cote*. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace on a :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \text{signifie que} \qquad \vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Les coordonnées d'un point, M, sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Pour tout point M de l'espace, on a donc :

$$\mathrm{M}\left(x\,;\,y\,;\,z\right) \qquad \text{signifie que} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Dans la calculatrice, les points comme les vecteurs sont déterminés par leur triplet de coordonnées. Ce triplet peut être entré comme un vecteur colonne, la série de coordonnées est entrée entre crochet et deux coordonnées consécutives sont séparées par des « ; ». Ce triplet peut être aussi entré comme un vecteur ligne, la série de coordonnées est entrée entre crochet et deux coordonnées consécutives sont séparées par des « , ». En pratique le point virgule s'obtient par une combinaison de touches assez fastidieuse, nous n'utiliserons désormais plus que des vecteurs ligne.

THÉORÈME VI.2.1

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A}\,;\,z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;\,y_\mathrm{B}\,;\,z_\mathrm{B})$ et pour tout nombre réel, λ, on a :

(1) $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$.

(2) $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\\y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\\z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}\end{pmatrix}$.

Démonstration (1) $\lambda\vec{u} = \lambda\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right) = \lambda x\vec{\imath}+\lambda y\vec{\jmath}+\lambda z\vec{k}.$

(2) $\vec{u}+\vec{v} = \left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)+\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right) = (x+x')\vec{\imath}+(y+y')\vec{\jmath}+(z+z')\vec{k}.$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(x_\mathrm{B}\vec{\imath}+y_\mathrm{B}\vec{\jmath}+z_\mathrm{B}\vec{k}\right)-\left(x_\mathrm{A}\vec{\imath}+y_\mathrm{A}\vec{\jmath}+z_\mathrm{A}\vec{k}\right) = (x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})\vec{\imath}+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})\vec{\jmath}+(z_\mathrm{B}-z_a)\vec{k}$ □

Exemples

1. *Considérons les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$.

$u := [-2,-4,4]$ $\qquad [-2\ \ -4\ \ 4]$

$v := [2,4,5]$ $\qquad [2\ \ 4\ \ 3]$

Pour calculer les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ *:*

$u+v$ $\qquad [0\ \ 0\ \ 9]$

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}$.

Pour calculer les coordonnées de $\vec{u}-\vec{v}$ *:*

$u-v$ $\qquad [4\ \ -8\ \ -1]$

$\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\-8\\-1\end{pmatrix}$.

Pour calculer les coordonnées de $-\dfrac{1}{2}\vec{u}$ *:*

$-u/2$ $\quad$ $[1 \quad 2 \quad -2]$

$-\frac{1}{2}\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

***2.** Considérons les points* A (1 ; 2 ; 3) *et* B (2 ; 3 ; 1)

$a := [1,2,3]$ $\quad$ $[1 \quad 2 \quad 3]$

$b := [2,4,1]$ $\quad$ $[2 \quad 4 \quad 1]$

$b - a$ $\quad$ $[1 \quad 2 \quad -2]$

On a donc : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Remarque *Deux vecteurs sont donc colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles. Dans la série d'exemples ci-dessus, on constate que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont des coordonnées proportionnelles. Les vecteurs $-\frac{1}{2}\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux ; on en déduit qu'ils sont colinéaires.*

En pratique le repère est tracé perspective cavalière. Sur la figure VI.2, nous avons placé le point M(2 ; 3 ; 1).

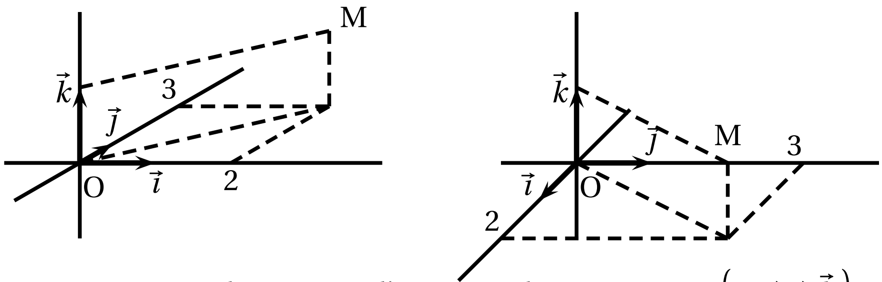


FIGURE VI.2 – Placements d'un point dans un repère $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

VI.2.1.b Orientation de l'espace

Soit $(\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ une base. On aimerait représenter matériellement cette base avec, dans cet ordre, le pouce, l'index et le majeur de la main *droite*. Ces trois doigts représentent alors trois vecteurs orientés de la paume vers l'extérieur. On place le pouce suivant le vecteur $\vec{\imath}$, l'index sur le vecteur $\vec{j}$ et on constate alors que l'ensemble des bases se partitionne en deux classes :

- les bases où on peut placer le majeur sur le vecteur $\vec{k}$;
- les bases où on peut placer le majeur sur le vecteur $-\vec{k}$.

Orienté l'espace c'est choisir l'une de ces deux classes comme classe des bases directes, l'autre classe devient alors la classe des bases indirectes.
Pour convention, les bases directes sont celles où on peut placer respectivement le pouce, l'index et le majeur de la main *droite* suivant les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.
Pour savoir si une base est directe ou indirecte, on peut utiliser les *règle des trois doigts de la main droite*.

On admet le théorème suivant.

THÉORÈME VI.2.2

(1) Les permutations circulaires conservent l'orientation des bases.

(2) Permuter deux vecteurs d'une base, inverse son orientation.

(3) Remplacer un vecteur d'une base par son opposé, inverse l'orientation de la base.

VI.2.1.c Repères particuliers

Les repères de l'espaces héritent des qualificatifs de leur base. Par exemple, si la base d'un repère est directe, le repère sera alors lui même qualifier de *direct*.

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.
Une base *normée* est une base dont tous les vecteurs sont unitaires.

Une base orthogonale est une base dont les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

Une base *orthonormée* est base orthogonale et normée. Un repère orthonormé est donc un repère dans lequel les vecteurs de la base sont unitaires et deux à deux orthogonaux. En particulier affirmer qu'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,\right)$ est orthonormé signifie que :

$$\begin{cases} \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{\imath}\perp\vec{\jmath}, \quad \vec{\imath}\perp\vec{k}, \quad \vec{\jmath}\perp\vec{k} \end{cases}$$

Dans la suite de ce chapitre l'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\,\right)$ direct.

VI.2.2 Produit scalaire

VI.2.2.a Angle entre deux vecteurs

Le produit scalaire dans l'espace est une extension à l'espace de la notion de produit scalaire dans le plan vue dans la classe précédente. Orienter « le plan » c'est choisir un sens de parcours comme sens positif. En pratique on choisit de canoniquement le sens trigonométrique et on déduit le concept d'angle orienté et de bases directes et indirectes. Dans l'espace le sens trigonométrique dans un plan n'est plus intrinsèque à ce plan, mais dépend également de la position de l'observateur par rapport à ce plan. Dans ce chapitre les angles de vecteurs sont des angles géométriques.

VI.2.2.b Norme d'un vecteur

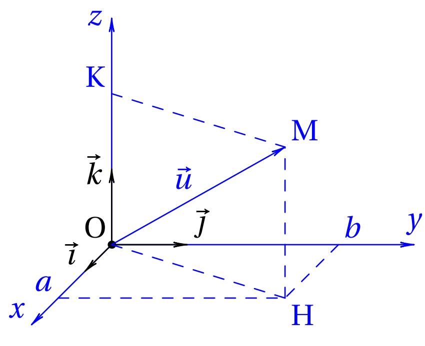


FIGURE VI.3 – Norme d'un vecteur.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{u}$. Le projeté orthogonal de M sur le plan $x\mathrm{O}y$ est le point $\mathrm{H}(a,b,0)$. Le projeté orthogonal de M sur l'axe $\mathrm{O}z$ est le point $\mathrm{K}(0,0,c)$.
Dans le plan $x\mathrm{O}y$ muni du repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$, le point H a pour coordonnées (a,b), donc : $\mathrm{OH} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$ ont le même triplet de coordonnées, $\begin{pmatrix}0\\0\\c\end{pmatrix}$, ils sont donc égaux. Le quadrilatère OHMK est donc un parallélogramme (éventuellement aplati).

De plus, le point H est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy, le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est donc orthogonal à tous les vecteurs du plan xOy, et en particulier au vecteur $\overrightarrow{OH}$. On en déduit que le quadrilatère OHMK est un rectangle. En appliquant le théorème de Pythagore, il vient :
$OM^2 = OH^2 + HM^2 = a^2 + b^2 + c^2$. D'où l'on tire : $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
On en déduit le théorème suivant.

Théorème VI.2.3
Dans l'espace, $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé.

(1) Pour tout vecteur, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

(2) Pour tous points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, on a :
$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}.$$

Exemples

1. *Considérons le vecteur* $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$. *On a :* $\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2+7^2+(-4)^2} = \sqrt{16+49+16} = \sqrt{81} = 9$.
Mais on peut aussi utiliser la calculatrice.
norm [4 , 7 , −4] 9
2. *Considérons les points* $A(1;2;3)$ *et* $B(2;3;1)$ *introduits dans la calculatrice lors des exemples d'applications du théorème VI.2.1.*
norm $(b-a)$ 3

VI.2.2.c Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

On a vu dans les classes précédentes que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2\right).$$
On décide donc de la définition suivante.

Définition VI.2.1
Le produit scalaire est l'application qui à tout couple de vecteurs, $(\vec{u}, \vec{v})$, de $\mathscr{E}$ associe le nombre réel, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, défini par :
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2\right).$$

Remarque *Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre et non un vecteur, le produit scalaire n'est donc pas une opération.*

VI.2.2.d Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On aimerait avoir une expression de, $\vec{u}\cdot\vec{v}$, en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
$u := [x, y, z]$ $[x \quad y \quad z]$

$v := [x', y', z']$ $\qquad [x' \quad y' \quad z']$

$\dfrac{(\text{norm}(u))^2 + (\text{norm}(v))^2 - (\text{norm}(u-v))^2}{2}$ $\qquad x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME VI.2.4

Dans l'espace, $\mathscr{E}$, muni d'un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'.$$

On peut calculer un produit scalaire à la calculatrice.

dotP(u, v) $\qquad x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$

Remarque *Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dépendent du repère, mais le résultat du produit scalaire, lui, est indépendant du repère orthonormé choisi.*

VI.2.2.e Propriétés algébriques du produit scalaire

forme bilinéaire ...

VI.2.2.f Propriétés géométriques du produit scalaire

projeté orthogonal, cos, inégalité

VI.2.3 Exercices

VI.2.a. Dans un repère orthonormé, placer les points A(4 ; −2 ; 3), B(−2 ; 1 ; −3) et C(2 ; −1 ; 1), puis démontrer qu'ils sont alignés.

VI.3 Géométrie analytique

Chapitre VII

Nombres complexes

VII.1 Introduction

VII.1.1 Des équations et des ensembles

Dans les classes précédentes, on a vu l'ensemble $\mathbb{N}$, dans cette ensemble on peut résoudre des équations telles que : $x+3=7$; où la solution est 4. Cependant, dans $\mathbb{N}$, des équations telles que : $x+7=3$; n'ont pas de solution. C'est alors qu'on a eu l'idée d'étendre l'ensemble des nombres ; on a ainsi obtenu un nouvel ensemble appelé $\mathbb{Z}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : -4. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $3x=-15$; ont une solution alors que d'autres équations, pourtant semblables, telles que : $3x=-7$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{Q}$, dans lequel l'équation précédente a une solution : $-\frac{7}{3}$. Mais cela n'était pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=4$; ont deux solutions (2 et -2) alors que des équations assez proches telles que : $x^2=3$; n'en ont pas. On a donc à nouveau étendu l'ensemble des nombres pour obtenir un nouvel ensemble, $\mathbb{R}$, dans lequel l'équation précédente a deux solutions : $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. Mais cela n'est pas suffisant car dans cet ensemble des équations telles que : $x^2=-4$; assez proches des deux équations précédentes, n'ont pas de solution. Si on veut qu'une telle équation ait, comme les autres, deux solutions il faut étendre l'ensemble des nombres.

On part du principe qu'il existe un nombre i (i comme imaginaire) tel que : $i^2=-1$; notre objectif est de trouver un nouvel ensemble, que nous noterons $\mathbb{C}$, qui sera le plus petit ensemble de nombres (qui seront appelés nombres complexes) vérifiant les contraintes suivantes.

1. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$;
2. $i\in\mathbb{C}$;
3. les lois algébriques concernant l'addition et la multiplication des nombres sont les mêmes dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$.

La somme ou le produit de deux nombres réels est un nombre réel, la dernière condition impose donc que la somme ou le produit de deux nombres complexes soit un nombre complexe. En particulier $2i$ et $-2i$ sont deux nombres complexes et on a :
$(2i)^2=2^2\times i^2=4\times(-1)=-4$ et $(-2i)^2=(-2)^2\times i^2=4\times(-1)=-4$;
donc la dernière équation envisagée à maintenant, elle aussi, deux solutions.

Pour les raisons que nous venons d'évoquer, tout nombre de la forme (dite *algébrique*)
$a+i\,b$, où a et b sont des nombres réels, sont des nombres complexes. Peut-on par additions ou par multiplications obtenir des nombres complexes qui ne peuvent pas se mettre sous cette forme ? Pour se faire une idée, prenons quelques exemples.

VII.1.2 Activités

Mettre sous forme algébrique les nombre complexes suivants.

$$z_1 = (2+5i)+(3-7i);\quad z_2 = (2+5i)-(3-7i);\quad z_3 = (2+5i)(3-7i)$$
$$z_4 = (2+5i)(2-5i);\quad z_5 = \frac{1}{2+i\sqrt{3}};\quad z_6 = \frac{3-7i}{2+5i}$$
$$z_7 = i^4;\quad z_8 = (1+i)^2;\quad z_9 = (1+i)^{17}$$

Plus généralement, pour $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ (où a, a', b, b' sont des réels), mettre sous forme algébrique les nombres complexes $z+z'$, zz',$z-z'$ et lorsque $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, $\frac{1}{z}$.

VII.1.3 Définitions

L'activité précédente suggère la définition suivante.

DÉFINITIONS VII.1.1 NOMBRE COMPLEXE, $\mathbb{C}$

(1) Un nombre complexe est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.
(2) L'ensemble des nombres complexes est appelé $\mathbb{C}$.

Remarque *On a : $0 \times 2i = (0 \times 2)i = 0 \times i$; donc : $0 = 0 \times 2i - 0 \times i = 0(2i - i) = 0 \times i$; d'où : $0 \times i = 0$.*

Notations et vocabulaire

1. *lorsqu'un nombre complexe z est écrit sous la forme $a + i\,b$, où a et b sont des nombres réels, on dit qu'il est écrit sous* forme algébrique *;*
2. *le nombre réel a est appelé* partie réelle *de z et est noté $\Re\mathrm{e}(z)$;*
3. *le nombre réel b est appelé* partie imaginaire *de z et est noté $\Im\mathrm{m}(z)$; en particulier $\Im\mathrm{m}(z)$ est un nombre réel ;*
4. *si $b = 0$, alors $z = a$ (car on a : $i \times 0 = 0$) ; z est un nombre réel ; tout nombre réel est bien un nombre complexe ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) ;*
5. *Si $a = 0$, alors $z = i\,b$; z est dit* imaginaire pur*.*

Exemple *Si : $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors : $\Re\mathrm{e}(z) = \frac{1}{2}$ et $\Im\mathrm{m}(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.*

VII.1.4 Calcul dans $\mathbb{C}$

VII.1.4.a Addition, soustraction, multiplication

Comme on l'a vu en activités, l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies de la façon suivante.

DÉFINITIONS VII.1.2

Soit a, a', b, b' des nombres réels.
(1) $(a + i\,b) + (a' + i\,b') = (a + a') + i(b + b')$;
(2) $(a + i\,b) - (a' + i\,b') = (a - a') + i(b - b')$;
(3) $(a + i\,b)(a' + i\,b') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Remarques

1. *Lorsque : $b = b' = 0$; on retrouve l'addition, la soustraction et la multiplication dans $\mathbb{R}$.*
2. *$(a + i\,b) + (-a - i\,b) = 0$; tout nombre complexe, $z = a + i\,b$, a un opposé : $-z = -a - i\,b$.*

Le théorème suivant signifie que, comme nous l'avions désiré, l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$; sa démonstration, fastidieuse et sans surprise, est laissée au soin du lecteur courageux.

THÉORÈME VII.1.1

Pour tous nombres complexes z, z', z'', on a :

(1)	$z+z' \in \mathbb{C}$	$+$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(2)	$z+z' = z'+z$	$+$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(3)	$z+(z'+z'') = (z+z')+z''$	$+$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(4)	$z+0 = 0+z = z$	dans $\mathbb{C}$, 0 est élément neutre pour $+$;
(5)	$z \times z' \in \mathbb{C}$	$\times$ est un loi de composition interne à $\mathbb{C}$;
(6)	$z \times z' = z' \times z$	$\times$ est commutative dans $\mathbb{C}$;
(7)	$z \times (z' \times z'') = (z \times z') \times z''$	$\times$ est associative dans $\mathbb{C}$;
(8)	$z \times 1 = 1 \times z = z$	dans $\mathbb{C}$, 1 est élément neutre pour $\times$;
(9)	$z \times (z'+z'') = z \times z' + z \times z''$	$\times$ est distributive par rapport à $+$ dans $\mathbb{C}$;

VII.1.4.b Conjugué d'un nombre complexe

DÉFINITION VII.1.3 CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + i\,b$.
On appelle *conjugué* de z le nombre complexe, noté $\overline{z}$, défini par : $\overline{z} = a - i\,b$.

Exemple *Si* $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *alors* $\overline{z} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

THÉORÈME VII.1.2

On a pour tout nombre complexe z :

$$\Re\mathrm{e}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \Im\mathrm{m}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Démonstration Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + i\,b$, on a :

$\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{a+i\,b+a-i\,b}{2} = \dfrac{2a}{2} = a = \Re\mathrm{e}(z)$, $\qquad \dfrac{z-\overline{z}}{2i} = \dfrac{a+i\,b-a+i\,b}{2i} = \dfrac{2i\,b}{2i} = b = \Im\mathrm{m}(z)$ □

VII.1.4.c Égalité de deux nombres complexes

THÉORÈME VII.1.3

Soit z et z' deux nombres complexes de formes algébriques : $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$.

(1) $z = 0$ si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$;

(2) $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$

0 est appelé *nombre complexe nul*.

Démonstration

(1) On sait que si $a = 0$ et $b = 0$, alors $z = 0$.

Réciproquement si $z = 0$, alors : $z\overline{z} = 0$; c'est-à-dire : $a^2 + b^2 = 0$;

a et b sont réels et on sait que dans $\mathbb{R}$ la somme des carrés de deux nombres est nulle si et seulement si les deux nombres sont nuls. On en déduit **(1)**.

(2) On a : $z - z' = (a - a') + i\,(b - b')$; donc : $z = z' \iff z - z' = 0 \iff \begin{cases} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$. □

Remarque

$$z = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff a^2 + b^2 = 0.$$

VII.1.4.d Inverse d'un nombre complexe non nul, division

Théorème VII.1.4

Tout nombre complexe non nul a un *inverse*.

Démonstration Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $z = a + i\,b$.
On a donc : $a^2 + b^2 \neq 0$; et d'après les définitions VII.1.2 :

$$\left(a + i\,b\right)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - i\,\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = 1.$$

L'inverse de z s'obtient par la formule : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\,\dfrac{b}{a^2+b^2}$. □

Exemple *Pour* $z = 3 + 5i$, *on obtient* : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{3+5i} = \dfrac{3-5i}{3^2+5^2} = \dfrac{3}{34} - \dfrac{5}{34}i$.

Remarques

1. *La formule introduite dans la démonstration du théorème VII.1.4 peut s'écrire :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$.

2. *On a pour tout nombre complexe, z, de forme algébrique,* $z = a + i\,b$:

$$z\overline{z} = a^2 + b^2.$$

Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est nombre réel positif.

Théorème VII.1.5

Le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux au moins est nul.

Démonstration Soit z et z' deux nombres complexes. D'après les définitions VII.1.2, le théorème VII.1.3 et la remarque §VII.1.3, si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
Réciproquement, si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$. En effet si $z \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z} \times zz' = \dfrac{1}{z} \times 0$; c'est-à-dire : $z' = 0$. □

La *division* se définit par : $\dfrac{z'}{z} = z' \times \dfrac{1}{z}$ (pour $z \neq 0$).

Exemple $\dfrac{2+3i}{2-i} = \dfrac{(2+3i)(2+i)}{2^2+1^2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{7}{5}i$.

Remarque *Plus généralement, un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un d'entre eux au moins est nul.*

VII.1.4.e Module d'un nombre complexe

Définition VII.1.4

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z = a + i\,b$.
Le module de z est le nombre réel positif : $\sqrt{a^2+b^2}$.

Exemples

1. *Le module de* $3+2i$ *est :* $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$.
2. *Le module de* $4i$ *est :* $\sqrt{0^2+4^2} = 4$.
3. *Le module de* -3 *est :* $\sqrt{(-3)+0^2} = 3$.
4. *Le module de* 5 *est :* $\sqrt{(5)^2+0^2} = 5$.

Remarques

1. *Plus généralement, si z est réel, alors* $b=0$ *et le module de z est :* $\sqrt{a^2+0^2} = |a| = |z|$. *Le module étend à* $\mathbb{C}$ *la fonction valeur absolue définie sur* $\mathbb{R}$.
2. *Pour tout nombre complexe, z, le module de z est :* $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Notations et vocabulaire *Le module d'un nombre complexe, z, est noté :* $|z|$

VII.1.4.f Identités remarquables

Les formules suivantes, établies dans $\mathbb{R}$, restent valables dans $\mathbb{C}$.

Théorème VII.1.6

Pour tous nombres complexes z et z' et tout entier naturel non nul n, on a :

$$(z+z')^2 = z^2+2zz'+z'^2 \quad ; \quad (z-z')^2 = z^2-2zz'+z'^2$$

$$(z+z')(z-z') = z^2-z'^2 \quad ; \quad (z+z')^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \text{(formule du binôme de Newton)}$$

$$z^n - z'^n = (z-z')\left(z^{n-1}+z^{n-2}z'+z^{n-3}z'^2+\cdots+z\,z'^{n-2}+z'^{n-1}\right) = (z-z')\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k}z'^k$$

Remarque *Toute les formules de sommations de termes en progressions arithmétiques ou géométriques établies dans* $\mathbb{R}$ *sont valable dans* $\mathbb{C}$ *et s'établissent de la même manière.*

Exercice VII.1.1. ***Calculer :*** $\sum_{k=0}^{100}\left((1+2i)k+2-i\right)$ ***et*** $\sum_{k=0}^{4n-1}(2-i)(2i)^k$

Solution *La première expression est une somme de termes en progression arithmétique, donc :*

$$\sum_{k=0}^{100}\left((1+2i)k+2-i\right) = (101)\frac{2-i+(1+2i)\times 100+2-i}{2} = 101(52+99i) = 5252+9999i.$$

La seconde expression est une somme de termes en progression géométrique, donc :

$$\sum_{k=0}^{4n-1}(2-i)(2i)^k = \frac{2-i-(2-i)(2i)^{4n}}{1-2i} = (2-i)\frac{1+2i}{5}\left(1-2^{4n}\right) = \frac{4-3i}{5}\left(1-2^{4n}\right).$$

□

VII.1.5 Exercices

VII.1.a. Écrire sous forme algébrique les nombres suivants : $(3+4i)(5+7i)$; $(2+i)(5+7i)$; $(5+7i)^2$; $(2-3i)(2-i$; $(5+7i)(5-7i)$.

VII.1.b. Calculer l'inverse des nombres suivants : $3-4i$; $7+i$; $5+5i$; $3-i$; $2+3i$; $4-7i$.

VII.1.c. Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :
$\frac{18+i}{3-4i}$; $\frac{40-30i}{7+i}$; $\frac{29-2i}{2+3i}$; $\frac{29-2i}{4-7i}$.

VII.1.d. Calculer le module des nombres suivants : $3-4i$; $7+i$; $5+5i$; $3-i$; $2+3i$; $4-7i$.

VII.1.e. Développer : $(z-1)^4$; $(z-i)^4$; $(2z+i)^3$; $(2z+1-i)^3$;

VII.1.f. Factoriser : z^4-1 ; z^3-1 ; z^3+1 ; $8z^3+27$; $27z^3-8$.

VII.1.g. Factoriser : $z^4+4z^3+6z^2+4z+1$; $z^4-20z^3+150z^2-500z+625$; $8z^3+36z^2+54z+27$; $27z^3-27iz^2-9z+i$; $8z^3-36iz^2-54z+27i$;

VII.2 Propriétés algébriques

VII.2.1 Théorème fondamental de l'algèbre

Dans cette partie l'étude des démonstrations est facultative.

THÉORÈME VII.2.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE

Soit P un polynôme à coefficients complexes et α un nombre complexe.
α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = (z-\alpha)Q(z).$$

Démonstration Si, pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; alors, pour $z = \alpha$, on obtient : $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$; et donc α est racine de P.
Réciproquement, démontrons que si α est racine de P alors il existe un polynôme Q tel que, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$.
Si P est le polynôme nul, l'implication est immédiate car n'importe quel polynôme Q convient ; nous supposons désormais le polynôme P non nul.
P est alors défini par une expression du type : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ (avec $a_n \neq 0$).
On introduit donc le polynôme T défini par : $T(z) = P(z+\alpha)$. T est la composée d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré n, T est donc un polynôme de degré n. Il est par conséquent défini par une expression du type : $T(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0$.
Or : $T(0) = P(0+\alpha) = 0$; donc : $b_0 = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}, \quad T(z) = z\left(b_n z^{n-1} + \ldots + b_1\right)$.
On en déduit que pour tout nombre complexe z : $P(z) = T(z-\alpha) = (z-\alpha)\underbrace{\left(b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1\right)}_{Q(z)}$.
La propriété est alors démontrée est introduisant le polynôme Q défini par : $Q(z) = b_n(z-\alpha)^{n-1} + \ldots + b_1$. □

Le lemme suivant est une conséquence du théorème fondamental de l'algèbre.

LEMME VII.2.2

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n a au plus n racines distinctes.

Démonstration Raisonnons par récurrence sur le degré de P.
Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à 0 est un polynôme constant non nul, il n'a donc pas de racine et la propriété est démontrée pour $n = 0$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que si pour un certain entier naturel k, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à k a au plus k racines distinctes, alors tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $k+1$ a au plus $k+1$ racines distinctes.
Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+1$ ayant plus de $k+1$ racines distinctes et soit α l'une d'elle. On aura pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$; où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à k. P ayant plus de $k+1$ racines distinctes, Q a plus de k racines distinctes et d'après l'hypothèse de récurrence, Q est donc le polynôme nul ; d'où, par produit, P est le polynôme nul.
Donc, par récurrence, un polynôme non nul de degré n ($n \in \mathbb{N}$) a au plus n racines distinctes. □

THÉORÈME VII.2.3

(1) Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.

(2) Deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes sont égaux.

Démonstration (1) est une conséquence immédiate de lemme précédent.

(2) Si P et T sont deux polynômes de degré inférieurs ou égaux à n coïncidant en $(n+1)$ valeurs distinctes alors P-T est un polynôme degré inférieur ou égal à n qui a $n+1$ racines distinctes ; donc d'après le lemme, $\mathrm{P}-\mathrm{T}$ est le polynôme nul ; d'où : $\mathrm{P}=\mathrm{T}$. □

VII.2.2 Propriétés du conjugué

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition VII.1.3 p. 109 et du théorème VII.1.2 p. 109.

THÉORÈME VII.2.4

Soit z un nombre complexe de forme algébrique : $z=a+ib$.

(1) $\overline{\overline{z}}=z$; **(2)** $z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$;

(3) $z+\overline{z}=2\Re\mathrm{e}(z)$; **(4)** $z-\overline{z}=2i\Im\mathrm{m}(z)$;

(5) z est réel si et seulement si $\overline{z}=z$; **(6)** z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z}=-z$;

Exemples

1. $\overline{\overline{3+2i}}=\overline{3-2i}=3+2i$

2. $(-3+2i)+\overline{(-3-2i)}=-6$

3. $(-3+2i)\overline{(-3-2i)}=(-3)^2-(-4)=13$

4. $(-3+2i)-\overline{(-3-2i)}=4i$

THÉORÈME VII.2.5

Pour tous nombres complexes z et z', pour tout entier relatif n, on a :

(1) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; **(3)** $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$; **(5)** $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ $(z\neq 0)$;

(2) $\overline{-z}=-\overline{z}$; **(4)** $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ $(z\neq 0)$; **(6)** $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ $(z\neq 0)$;

Démonstration Introduisons les formes algébriques de z et z' : $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$.
On en déduit immédiatement **(1)** et **(2)** .

(3) On a : $zz'=(aa'-bb')+i(ab'+a'b)$ et $\overline{z}\overline{z'}=(a-ib)(a'-ib')=(aa'-bb')-i(ab'+a'b)$;
donc : $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$.

(4) Pour $z\neq 0$, on a : $z\times\dfrac{1}{z}=1$, donc, $\overline{z\times\dfrac{1}{z}}=1$, donc, $\overline{z}\times\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=1$, donc, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$.

(5) Pour $z\neq 0$, on a : $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)}=\overline{z'\times\dfrac{1}{z}}=\overline{z'}\times\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\overline{z'}\times\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$;

(6) Pour $n>0$ la propriété est obtenue en appliquant $n-1$ fois la propriété **(3)**.

Pour $n<0$ on a $-n>0$ et donc : $\overline{z^n}=\overline{\left(\dfrac{1}{z^{-n}}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z^{-n}}}=\dfrac{1^{-n}}{\overline{z}^{-n}}=\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)^{-n}=\overline{z}^n$ □

Exemple $\overline{\left(\dfrac{2-3i+(1+2i)(4-7i)^9}{3+4i+(5-2i)^{-7}}\right)}=\dfrac{2+3i+(1-2i)(4+7i)^9}{3-4i+(5+2i)^{-7}}$

THÉORÈME VII.2.6

Si α est une racine d'un polynôme, P, à coefficients *réels*, alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P.

Démonstration P a une expression de la forme, $\mathrm{P}(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ où $a_n,\ldots a_0$ sont des nombres réels. On a : $\overline{\mathrm{P}(\alpha)}=\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0=\mathrm{P}\left(\overline{\alpha}\right)$. Or, $\mathrm{P}(\alpha)=0$, donc : $\mathrm{P}\left(\overline{\alpha}\right)=0$. □

Remarques

1. *Lorsque α est réelle on a, $\alpha=\overline{\alpha}$ et ce théorème n'apporte alors aucune information supplémentaire. Mais lorsque α n'est pas réelle on a, $\alpha\neq\overline{\alpha}$ et ce théorème apporte une racine supplémentaire.*

2. *Les racines α et $\overline{\alpha}$ ont la même multiplicité dans* P.

Exercice VII.2.1. ***Factoriser le polynôme, P, défini par, $\mathrm{P}(z)=3z^3-21z^2+45z-75$, sachant que 5 et $1+2i$ sont deux racines de P.***

Solution *P est un polynôme de degré 3, il a donc au plus 3 racines, il est à coefficients réels, ces racines sont donc deux à deux conjuguées. On en déduit que P à 3 racines : 5, $1+2i$ et $1-2i$. De plus, le coefficient dominant de P est 3, on déduit la factorisation suivante :*

$$\mathrm{P}(z) = 3(z-5)(z-1-2i)(z-1+2i).$$

□

VII.2.3 Résolution des équations du second degré

VII.2.3.a Factorisation d'un trinôme du second degré

On se propose de factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $\mathrm{P}(z) = az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

On introduit le discriminant de P, $\Delta = b^2 - 4ac$, et le nombre, δ, défini par : $\delta = \begin{cases} \sqrt{\Delta} & \text{si } \Delta \geqslant 0 \\ i\sqrt{-\Delta} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$.

Si $\Delta \geqslant 0$, alors $\delta^2 = \Delta$ et si $\Delta < 0$,alors $\delta^2 = i^2(-\Delta) = \Delta$. On a donc toujours : $\delta^2 = \Delta$.

Procédons, comme en classe de Cinquième, en utilisant la forme canonique. Pour tout nombre complexe z, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(z) &= a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) && \text{, car } a \neq 0 \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \\
&= a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{(2a)^2}\right] \\
&= a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right) \\
&= a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right)
\end{aligned}$$

On déduit de cette étude le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.7

(1) Tout trinôme du second degré à coefficients réels peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

(2) Les racines du polynôme d'indéterminée z : $az^2 + bz + c$; où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$, sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est l'une des deux racines carrées complexes du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.
On a alors la factorisation :

$$az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$$

Remarques

1. *Les racines carrées de Δ sont δ et $-\delta$, donc remplacer δ par $-\delta$ ne fait qu'échanger z_1 et z_2.*

2. *Lorsque $\Delta = 0$ les racines carrées du discriminant sont égales et on a : $z_1 = z_2$.*

3. *Lorsque $\Delta \neq 0$, on a : $z_1 \neq z_2$.*

4. *Conformément au théorème* VII.2.6 *p.* 113*, lorsque δ est imaginaire, les nombres z_1 et z_2 sont conjugués.*

Exercice VII.2.2. ***Factoriser :*** $\mathrm{P}_1(z) = 6z^2 + 5z - 4$.

Solution $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 \times (-4) = 121 = 11^2$. *Les racines de* P_1 *sont :* $\frac{-5-11}{12} = -\frac{4}{3}$ *et* $\frac{-5+11}{12} = \frac{1}{2}$. *On en déduit la factorisation :*

$$\mathrm{P}_1(z) = 6\left(z + \frac{4}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right) = (3z+4)(2z-1).$$

□

Exercice VII.2.3. ***Factoriser :*** $\mathrm{P}_2(z) = 6z^2 + 5z + 4$.

Solution $\Delta = 5^2 - 4 \times 6 \times (-4) = -71 = \left(i\sqrt{71}\right)^2$. *Les racines de* P_2 *sont :* $\frac{-5 - i\sqrt{71}}{12}$ *et* $\frac{-5 + i\sqrt{71}}{12}$.
On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}_2(z) = 6\left(z + \frac{5 + i\sqrt{71}}{12}\right)\left(z + \frac{5 + i\sqrt{71}}{12}\right).$$

□

VII.2.3.b Résolution d'équations du second degré

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z, (E) : $az^2 + bz + c = 0$;
où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.
Reprenons les notations du théorème VII.2.7 ; on a :
$az^2 + bz + c = 0 \iff a(z - z_1)(z - z_2) = 0 \iff (z = z_1 \quad \text{ou} \quad z = z_2)$.
On en déduit que lorsque $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z = -\frac{b}{2a}$.
Lorsque $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes.

Exercice VII.2.4. ***Résoudre dans*** $\mathbb{C}$***, (E) :*** $2z^2 + 3z + 3 = 0$

Solution *Le discriminant est :* $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 3 = -15 = \left(i\sqrt{15}\right)^2$ *; donc :* $\mathrm{S} = \left\{\frac{-3 - i\sqrt{15}}{4} ; \frac{-3 + i\sqrt{15}}{4}\right\}$.□

Exercice VII.2.5. ***Résoudre dans*** $\mathbb{C}$***, (E) :*** $2z^2 + 3z - 1 = 0$

Solution *Le discriminant est :* $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17 = \left(\sqrt{17}\right)^2$ *; donc :* $\mathrm{S} = \left\{\frac{-3 - \sqrt{17}}{4} ; \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right\}$

□

VII.2.3.c Somme et produit de racines

Reprenons les notations du théorème VII.2.7 ; pour tout nombre complexe z on a :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1 z_2$$

On en déduit, par identifications, que : $b = -a(z_1 + z_2)$ et $c = az_1 z_2$.
D'où l'on tire le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.8

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme du second degré ($a \neq 0$), S la somme et P le produit des racines. On a :

$$\mathrm{S} = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \quad \mathrm{P} = \frac{c}{a}$$

Exercice VII.2.6. ***Résoudre :*** $\mathbf{3z^2+4z-1=0}$.

Solution *On remarque que 1 est solution évidente, on sait que le produit des solutions dans* $\mathbb{C}$ *est* $-\frac{1}{3}$ *donc l'autre solution est :* $-\frac{1}{3}$ *; d'où :* $S=\left\{1;-\frac{1}{3}\right\}$ □

Théorème VII.2.9

Deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont les racines du trinôme : $z^2-\mathrm{S}z+\mathrm{P}$.

Démonstration Soit z_1 et z_2 ces deux nombres. z_1 et z_2 sont les racines du trinôme : $(z-z_1)(z-z_2)$. En développant ce trinôme, il vient : $(z-z_1)(z-z_2)=z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2=z^2-\mathrm{S}z+\mathrm{P}$.
Donc z_1 et z_2 sont les racines du trinôme : $z^2-\mathrm{S}z+\mathrm{P}$. □

Exercice VII.2.7. ***Déterminer deux nombres dont la somme vaut*** **1** ***et le produit*** **3.**

Solution *Ces deux nombres sont les racines de :* z^2-z+3*. On a :* $\Delta=1^2-4\times1\times3=-11=i\sqrt{11}$*.*
Ces deux nombres sont donc : $\frac{1-i\sqrt{11}}{2}$ *et* $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$ □

VII.2.4 Racines carrées d'un nombre complexe

On appelle racine carrée d'un nombre complexe Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2=\mathrm{Z}$.
Par exemple 2 a deux racines carrées : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$; -1 a également deux racines carrées : i et $-i$.
L'écriture $\sqrt{\mathrm{Z}}$ n'a de sens que si Z est un *réel positif*. Les racines carrées de Z sont les racines du polynôme de degré 2 : $z^2-\mathrm{Z}$. Un nombre Z a donc au plus 2 racines carrées. 0 a une racine carrée double : 0.
Soit Z un nombre complexe non nul de forme algébrique : $\mathrm{Z}=\mathrm{A}+i\mathrm{B}$; on se propose de déterminer les éventuelles racines carrées complexes de Z. On cherche donc les nombres z de forme algébrique : $z=a+ib$; tels que : $z^2=\mathrm{Z}$.
Procédons par analyse-synthèse.

Analyse Soit z une racine carrée complexe de Z (s'il en existe).
On a : $|\mathrm{Z}|^2=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=\mathrm{Z}\overline{\mathrm{Z}}=z^2\overline{z^2}=\left(z\overline{z}\right)^2=\left(a^2+b^2\right)^2$. C'est-à-dire : $|z|^2=a^2+b^2=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}=|\mathrm{Z}|$.
On a également : $\mathrm{A}+i\mathrm{B}=\mathrm{Z}=z^2=(a+ib)^2=a^2-b^2+2abi$. Par identification des parties réelles et imaginaires des membres extrêmes de ces égalités, il vient : $a^2-b^2=\mathrm{A}$ et $2ab=\mathrm{B}$.

Synthèse Les nombres réels a et b sont des solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2} \\ a^2-b^2=\mathrm{A} \\ 2ab=\mathrm{B} \end{array}\right. \tag{VII.1}$$

En effectuant la demi-somme et la demi-différence membre à membre des deux premières équations dans (VII.1), il vient :

$$(\mathrm{VII.1}) \iff \left\{\begin{array}{l} a^2=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2} \\ b^2=\dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2} \\ 2ab=\mathrm{B} \end{array}\right.$$

Lorsque B **est positif** a et b sont de même signe et on en déduit que :

$$(a,b)\in\left\{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2}}\right),\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2}},-\sqrt{\frac{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}+\mathrm{A}}{2}}\right)\right\}$$

Vérifions la validité de la première racine : $z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}$.
On a :

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2} - \frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2} + 2i\sqrt{\frac{\left(\sqrt{A^2+B^2}+A\right)\left(\sqrt{A^2+B^2}-A\right)}{4}}\\
z^2 &= \frac{A+A}{2} + i\sqrt{A^2+B^2-A^2}\\
z^2 &= A + i\,|B|\\
z^2 &= A + iB\\
z^2 &= Z
\end{aligned}$$

L'autre racine est l'opposée de la première, elle a donc également pour carré : Z.

Lorsque B **est négatif** a et b sont de signes contraires et on en déduit que :

$$(a,b) \in \left\{ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} \right), \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} \right) \right\}$$

Vérifions la validité de la première racine : $z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}}$.
On a :

$$\begin{aligned}
z^2 &= \frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2} - \frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2} - 2i\sqrt{\frac{\left(\sqrt{A^2+B^2}+A\right)\left(\sqrt{A^2+B^2}-A\right)}{4}}\\
z^2 &= \frac{A+A}{2} - i\sqrt{A^2+B^2-A^2}\\
z^2 &= A - i\,|B|\\
z^2 &= A + iB\\
z^2 &= Z
\end{aligned}$$

L'autre racine est l'opposée de la première, elle a donc également pour carré : Z.

On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME VII.2.10

Tout nombre complexe non nul a deux racines carrées complexes opposées.

Remarque *La méthode utilisée pour démontrer ce théorème tient lieu de méthode de détermination pratique. On remarquera à cet égard que le système* (VII.1) *peur aussi s'écrire :*

$$\begin{cases} a^2+b^2 = |Z| \\ a^2-b^2 = \Re\mathrm{e}\,(Z) \\ 2ab = \Im\mathrm{m}\,(Z) \end{cases}.$$

Exercice VII.2.8. ***Déterminer les racines carrées complexes de*** $2+3i$.

Solution *On a :* $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

Soit z *un nombre complexe de forme algébrique :* $z = a + ib$ *; on a :* $z^2 = (a^2-b^2) + i(2ab)$ *et* $|z|^2 = a^2+b^2$.

z *est racine carrée de* $2+3i$ *si et seulement si* $(a;b)$ *est solution du système :* (Σ) $\begin{cases} a^2+b^2 &= \sqrt{13} \\ a^2-b^2 &= 2 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$.

$$(\Sigma) \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2a^2 & = & \sqrt{13}+2 \\ 2b^2 & = & \sqrt{13}-2 \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}+2}{2} \\ b^2 & = & \dfrac{\sqrt{13}-2}{2} \\ 2ab & = & 3 \end{array}\right. .$$

On a donc : $\left(a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}}\right)$ *et* $\left(b = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}} \text{ ou } b = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$ *et a et b sont de même signe.*

Les racines carrées de $2+3i$ *sont donc :* $z = \sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$;

et son opposé : $-z = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}$. □

VII.2.5 Exercices

VII.2.a. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^2-5z+7=0$; $2z^2-5z-7=0$; $2z^2+7z+5=0$; $2z^2+7z+7=0$.

VII.2.b. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $2z^2-5z+7$; $2z^2+5z-7$; $2z^2-7z+5$; $2z^2-7z+7$.

VII.2.c. Déterminer les racines carrées de : $3-4i$; $5+12i$; $1+i$; $6-5i$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

VII.3 Exercices

Calculs élémentaires

VII.1. n désigne un entier naturel. Déterminer sans calculatrice la forme algébrique des nombres suivants, puis vérifier le résultat avec la calculatrice.

a. $z_1 = i^3$ $\quad z_2 = i^4$

b. $z_3 = i^{4n}$ $\quad z_4 = i^{4n+1}$

c. $z_5 = i^{4n+2}$ $\quad z_6 = i^{4n+3}$

d. $z_7 = i^{2012}$ $\quad z_8 = i^{2523}$

VII.2. n désigne un entier naturel. Déterminer sans calculatrice la forme algébrique des nombres suivants, puis vérifier le résultat avec la calculatrice.

a. $z_1 = \left(\sqrt{3}+i\right)^2$ $\quad z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^3$

b. $z_3 = \left(\sqrt{3}+i\right)^4$ $\quad z_4 = \left(\sqrt{3}+i\right)^6$

c. $z_5 = \left(\sqrt{3}+i\right)^7$ $\quad z_6 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$

d. $z_7 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{12n}$ $\quad z_8 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{12n+1}$

e. $z_9 = \left(\sqrt{3}+i\right)^{12n+2}$ $\quad z_{10} = \left(\sqrt{3}+i\right)^{12n+3}$

f. $z_{11} = \left(\sqrt{3}+i\right)^{10}$ $\quad z_{12} = \left(\sqrt{3}+i\right)^{16}$

VII.3. Quels sont les nombres complexes dont l'inverse est le conjugué.

Trinômes du second degré

VII.4. Résoudre dans $\mathbb{C}$.

a. $z^2+2z-8=0$.

b. $3z^2-4z+2=0$

c. $4z^2+3z+2=0$

d. $4z^2+3z-2=0$

VII.5. Factoriser.

a. $P_1(z) = z^2+2z-8$.

b. $P_2(z) = 3z^2-4z+2$.

c. $P_3(z) = 4z^2+3z+2$.

d. $P_4(z) = 4z^2+3z-2$.

VII.6. Factoriser.

a. $P_1(z) = 8z^2+2z-1$.

b. $P_2(z) = 2z^2-4z+3$.

c. $P_3(z) = 2z^2+3z+4$.

d. $P_4(z) = 2z^2+3z-4$.

VII.7. **1.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2+z+1=0 \qquad \text{(E)}$$

On désignera par j la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive.

2. Calculer, $|j|$, puis vérifier que : $\overline{j} = \dfrac{1}{j}$ et $\overline{j} = j^2$.

3. Décomposer $z^3 - 1$ en produit de trois facteurs de degré 1.

4. Déterminer le forme algébrique de j^3.

5. n désigne un nombre entier naturel. Déterminer le forme algébrique des nombres suivants : j^{3n} ; j^{3n+1} ; j^{3n+2}.

6. Donner le forme algébrique des nombres suivants : j^{5728} ; j^{9824} ; j^{8928}.

Identités remarquables

VII.8. Développer sans calculatrice, puis vérifier avec la calculatrice.

a. $(z+2)^4$

b. $(z+i)^4$

c. $(4z-5i)^3$

VII.9. Factoriser sans calculatrice, en produit de facteurs de degré 1, puis vérifier avec la calculatrice.

a. $z^3 - 3z^2 + 3z - 1$.

b. $z^3 - 3iz^2 - 3z + i$.

c. $z^6 - 1$.

VII.10. **1.** Écrire sous forme algébrique : $(1+i)^2$; $(1+i)^3$; $(1+i)^4$.

2. n désigne un nombre entier naturel. On considère les nombres :

$$A_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{4n} C_{4n}^k i^k \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{4n} C_{4n}^k i^k.$$

a. Déterminer une expression simple de $A_n + B_n$.

b. Justifier que A_n est un nombre réel et que B_n est un nombre imaginaire.

c. Calculer A_n et B_n.

3. Calculer, sans calculatrice, les nombres z_1 et z_2 définis par : $z_1 = C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ et $z_2 = C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.

VII.11. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{29} \big(1 + 7i + k(3-i)\big)$.

VII.12. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n-1} (1+7i)(3i)^k$.

VII.13. Cet exercice pourra être traiter après l'exercice VII.7.. j est le nombre défini dans l'exercice VII.7.. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n-1} i\sqrt{3}(2j)^k$

Approfondissement

VII.14. Factoriser sans calculatrice, en produit de facteurs de degré 1, puis vérifier avec la calculatrice.

a. $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 27i$.

b. $z^3 - 3iz^2 - 3z + 28i$.

c. $z^6 + 1$.

Index