# Racines carrées – Nombres réels

## I. Quelques rappels :

### 1. Ensemble des entiers naturels :

Les nombres naturels ou entiers naturels servent à dénombrer les objets.
L'ensemble des entiers naturels est noté **$\mathbb{N}$**

$\mathbb{N}$= {0,1,2,3,…..} *exemples : $54 \in \mathbb{N}$ ; $0 \in \mathbb{N}$*

### 2. Ensemble des entiers relatifs :

Un entier relatif est soit un entier naturel, soit l'opposé d'un entier naturel.

L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$= {……-3,-2,-1,0,1,2,3,4,……} *exemples : $37 \in \mathbb{Z}$ ; $-12 \in \mathbb{Z}$*

### 3. Ensemble des nombres décimaux :

Un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10 c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est entier relatif et n un entier naturel.
Il peut s'écrire sous forme décimale comprenant une partie entière, une virgule et, après la virgule, une partie décimale finie, sans zéros inutiles.

L'ensemble des décimaux est noté **D**

*Exemples :-7,21 est un décimal car $-7,21 = \frac{-721}{10^2}$*

*5 est un décimal car $5= \frac{5}{10^0}$*

### 4. Ensemble des rationnels :

Un nombre rationnel est le quotient d'un entier relatif par un entier naturel non nul c'est-à-dire qu'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ où a est entier relatif et b un entier naturel non nul.
Un rationnel non décimal a une écriture décimale périodique infinie.

L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$

*Exemples : $\frac{4}{37} \in \mathbb{Q}$ $\frac{4}{37} = 0,108108108……$ 108 se répète ( période)*

*$\frac{-437}{22} \in \mathbb{Q}$ $\frac{-437}{22} =-19.863636363….$ 63 se répète ( période)*

Remarque : Attention, la période n'est pas forcément visible sur la calculatrice.(nombre de chiffres affichés insuffisant)

$\frac{341}{19} = 17,\underbrace{947368421052631578}_{\text{période}}94……..$

Inversement toute écriture décimale illimitée et périodique peut s'écrire sous forme de fraction.

*Exemple :* $x = 1,2343434.....$

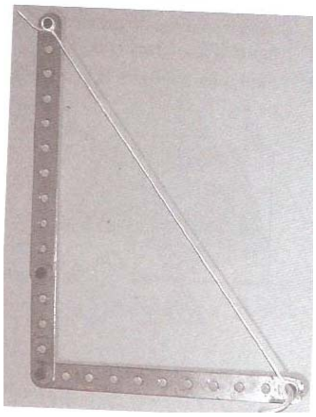
$$\begin{array}{r} 1000x = 1234,3434\ldots\ldots \\ \underline{10x = \quad 12,3434\ldots\ldots} \\ 990x = 1222 \end{array}$$

*d'où* $x = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$

## II. Racines carrées :

### 1. Un peu d'histoire…les racines carrées « un mal nécessaire… »

Lorsque l'on assemble deux tiges et qu'on les maintient à angle droit, la longueur de fil qui joint les extrémités est déterminée. Cela signifie que si l'on connaît les mesures des deux tiges il doit être possible de calculer la longueur de la ficelle.



Ce problème très ancien, se pose dès que l'on réalise des bâtiments dont l'importance nécessite de faire des plans, de prévoir le nombre de pierres nécessaires, la façon de les tailler, de les agencer.

Plusieurs tablettes d'argile, datant de l'époque de HAMMOURABI à Babylone (vers 1700 av J.-C.), ont été retrouvées au milieu du XIX ème siècle. Ces tablettes présentent des listes de nombres et des figures qui montrent que plus de mille ans avant PYTHAGORE on savait évaluer avec une précision remarquable les dimensions d'un triangle rectangle.

Les recherches sur la construction des pyramides ont montré que les Egyptiens, eux aussi, faisaient de tels calculs. Mais c'est assurément à l'école de Pythagore, au VI ème siècle av. J.-C., que l'on doit la formule générale et , surtout, la découverte d'un fait étonnant : pour ces calculs, les nombres habituels ( les naturels et les fractions ) ne suffisent pas. Il faut en inventer d'autres !

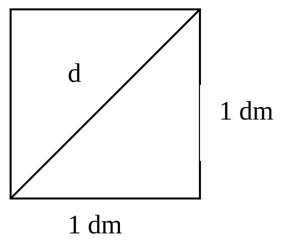
2. **Découverte des nouveaux nombres…**

- Rappel du théorème de Pythagore **:**

**« Dans tout triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit ».**

Pour calculer la mesure de l'hypoténuse nous avons besoin d'introduire de nouveaux nombres.

En effet, voici un carré dont le côté « a » mesure 1 dm. On se propose d'évaluer la longueur de sa diagonale « d ». Pour ce faire, il est nécessaire d'appliquer le théorème de Pythagore.




$d^2=1^2+1^2 \Leftrightarrow d^2=2$

On recherche un nombre dont le carré est égal à 2.

S'il existait une fraction irréductible $\frac{m}{n}$ $(m \in Z \ et \ n \in IN_0)$ dont le carré serait égal à 2 on devrait avoir : $m^2 = 2n^2$.

1. Compléter le tableau suivant pour des nombres entiers naturels non nuls :

| Le nombre se termine par | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Son carré se termine par | | | | | | | | | | |
| Le double de son carré se termine par | | | | | | | | | | |

2. Est-il possible que le carré d'un entier soit égal au double du carré d'un autre : $m^2 = 2n^2$ ?

Conclusion

On constate que le nombre cherché ne peut être un nombre rationnel. Il s'agit d'un irrationnel que l'on notera $\sqrt{2}$.

- Comment allons-nous travailler avec ces nouveaux venus ?

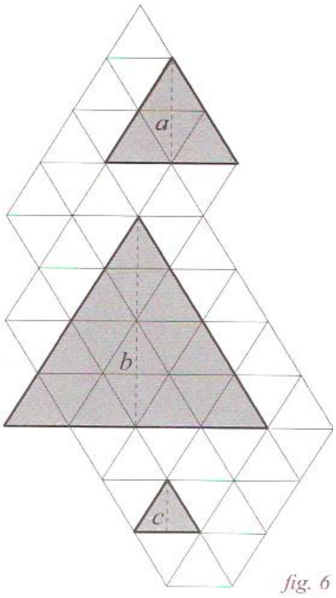


fig. 6

La figure ci-contre montre des triangles équilatéraux représentés sur une trame triangulaire.

Calculons la hauteur du premier triangle :
$2^2 = 1^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$

Calculons la hauteur du deuxième triangle :
$4^2 = 2^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 12 \Leftrightarrow b = \sqrt{12}$
Mais $b = 2a$, par conséquent, $b = 2\sqrt{3} = \sqrt{12}$
( constatation géométrique )
Numériquement :

$b = \sqrt{12}$ $\qquad$ $b = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3}$ $\qquad$ $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$

on en conclut que

$$\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$$

Calculons la hauteur du troisième triangle :

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow c^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

On peut aussi considérer que c est la moitié de a et donc $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et dans ce cas $\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Numériquement :

$c = \sqrt{\dfrac{3}{4}}$ $\qquad$ $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$ $\qquad$ et on en conclut que $\qquad \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$

- Et d'un point de vue algébrique ?

Considérons l'équation suivante : $x^2 - 9 = 0$
Nous pouvons l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs et appliquer la règle du produit nul.
Il vient :
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \quad OU \quad x = 3$.

Effectuons le même raisonnement avec l'équation $x^2 - 5 = 0$.
$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \quad OU \quad x = \sqrt{5}$

On constate qu'il existe deux nombres dont le carré est égal à 5, ces deux nombres sont opposés.

Mais, il n'existe aucun nombre dont le carré soit négatif, par conséquent lorsque l'on parle de la racine carrée d'un nombre, ce nombre est impérativement positif ou nul.

### 3. Définition, règles de calcul et propriétés

**a. Définition :**

**La racine carrée** d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est a.

$$\forall a \in IR^{+} : \sqrt{a} = x \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ \ et \\ x^2 = a \end{cases}$$

$\sqrt{\ }$ s'appelle le radical et $\sqrt{a}$ se lit « racine carrée de a » ou « racine de a ».

Le carré de tout nombre est un nombre positif ; **donc aucun nombre strictement négatif n'admet de racine carrée.**

**$\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est un nombre négatif.**

Nous serons donc amenés à poser des conditions d'existence (en abrégé : C.E.) pour les expressions littérales contenant des radicaux d'indice 2, c'est-à-dire les conditions qu'il faut poser pour que ces expressions aient un sens.

***Exemples :***

**1)** $\sqrt{144} = 12$ car 12 est positif et $12^2=144$.
**2)** $\sqrt{0} = 0$ car $0^2 = 0$.
**3)** -16 n'admet pas de racine carrée.

**$\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a \leq 0$**

Dans tous les cas on peut écrire $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

***Exemples :***

$\sqrt{3^2} = 3$
$\sqrt{(-3)^2} = -(-3) = 3$

**Propriété :**

**Pour tout nombre positif x, on a $(\sqrt{a})^2=a$**

***Exemple :*** $(\sqrt{144})^2 = 12^2 = 144$ et $\sqrt{12^2} = \sqrt{144} = 1$

On appelle **carré parfait** un entier positif dont la racine carrée est un entier.

***Exemples :***

**1)** 16 est un carré parfait car $16 = 4^2$, et $\sqrt{16} = 4$.
**2)** 40 000 est un carré parfait car $40\,000 = 200^2$, et $\sqrt{40\,000} = 200$

**Carrés parfaits compris entre 1 et 400**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| **$a^2$** | **1** | **4** | **9** | **16** | **25** | **36** | **49** | **64** | **81** | **100** | **121** | **144** | **169** | **196** | **225** | **256** | **289** | **324** | **361** | **400** |

**b. Règles de calcul sur les radicaux :**

**Pour tous les nombres positifs a et b, on a :** $\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}}$

**Pour tous les nombres positifs a et b, avec b ≠ 0, on a :** $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

*Autrement dit :*

**La racine carrée du produit de deux nombres positifs est le produit des racines carrées de ces nombres.**

***Exemple :*** $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{4\ .\ 9} = \sqrt{36} = 6$ et $\sqrt{4}\ .\ \sqrt{9} = 2\ .\ 3 = 6$

*Démonstration :* $\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$ *et* $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$

et donc : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

puisque les deux membres de cette égalité sont positifs.

**La racine carrée du quotient de deux nombres strictement positifs est le quotient des racines carrées de ces nombres.**

***Exemple :*** $\sqrt{36} = 6$ $\quad\sqrt{9} = 3$ $\quad\sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$ *et* $\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

*Démonstration :* $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$ *et* $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$

et donc : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

puisque les deux membres de cette égalité sont positifs.

***Exemples :***

$\sqrt{7}\times\sqrt{847}=\sqrt{7\times847}=\sqrt{5\,929}=77$ $\quad\sqrt{12}\times\sqrt{3}=\sqrt{12\times3}=\sqrt{36}= 6$ $\quad\sqrt{64\times49}=\sqrt{64}\times\sqrt{49}= 8\times7 = 56$

$\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$ $\quad\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}$ .

**Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif p** : $\boxed{\sqrt{a^p} = (\sqrt{a})^p}$
(découle de la propriété du produit)

***Attention : Il n'y a aucune règle générale pour la somme et la différence de radicaux !***

***Exemples :***

$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ mais $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ $\quad\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 – 3 = 2$ mais $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

## c. Applications :

- Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit entier possible :

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{3} – 2\sqrt{27} + 4\sqrt{300} =$

- Rendre rationnel le dénominateur d'une fraction

i) Le dénominateur n'est pas une somme ou une différence.

Exemple : $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Cette réponse, bien qu'exacte, est souvent transformée : on rend le dénominateur rationnel.

Règle :

| |
|---|
| ***On multiplie le numérateur et le dénominateur par le radical du dénominateur.*** |

Notre réponse devient : $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Autre exemple : $\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5\ .\ 7}}{7} = \frac{\sqrt{35}}{7}$

ii) Le dénominateur est une somme ou une différence de deux termes (binôme).

Règle :

| |
|---|
| ***On multiplie le numérateur et le dénominateur par le binôme conjugué du dénominateur.*** |

Exemples :

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2} = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}{3-2} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$$

## III. Ensemble des réels :

### 1. Ensemble des irrationnels

Les nombres que nous venons d'introduire (racines carrées) sont des nombres irrationnels. Il existe d'autres nombres irrationnels (par exemple π).

Un nombre **irrationnel** est défini par un développement décimal **illimité et non périodique**.

*Exemples :* $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$
$\pi = 3{,}14159\ldots\ldots$

L'ensemble des nombres irrationnels est noté **I**.

Un nombre ne peut être à la fois rationnel et irrationnel. $Q \cap I = \varnothing$

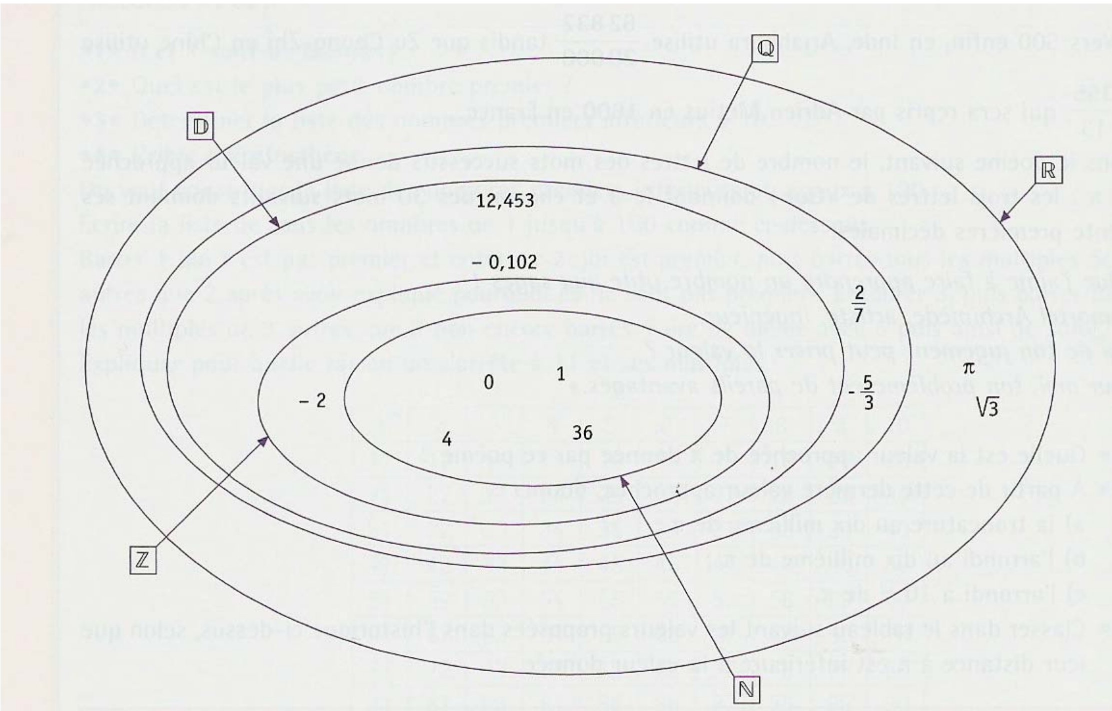
### 2. Ensemble des réels :

L'ensemble des nombres réels est la réunion de l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

L'ensemble des nombres réels est noté **IR**

$IR = Q \cup I$

### 3. Comparaison des différents ensembles de nombres



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R} \text{ et } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

Tout nombre réel peut s'écrire sous forme décimale.
L'écriture décimale d'un nombre est de la forme :
partie entière , partie décimale

| **NOMBRES** | **Caractérisation :**<br>**Partie décimale** | **exemples** |
|---|---|---|
| Entiers naturels ou relatifs | nulle | 7 |
| Décimaux | nulle<br>*ou*<br>finie | 7<br><br>- 3,54 |
| Rationnels | nulle<br>*ou*<br>finie<br>*ou*<br>infinie et contenant une période | 7<br><br>-3,54<br><br>24,45323232…… |
| Irrationnels | infinie et ne contenant pas de période | $\pi$= 3,141592……… |

## 4. Droite graduée

Les nombres réels sont les abscisses des points sur une droite graduée.

On a donc :

**A tout point de la droite graduée correspond un réel et un seul ; c'est l'abscisse de ce point.**
**A tout réel « x » correspond un point et un seul de la droite graduée ; il s'agit du point d'abscisse « x ».**

*Graduer la droite puis placer les points d'abscisses :*

$-5 \quad ; \quad 3{,}5 \quad ; \quad \frac{3}{4} \quad ; \quad \sqrt{5} \quad ; \quad -\sqrt{2}$