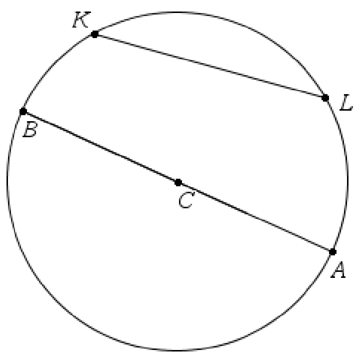
Cercle – arcs – angles.

1. Rappels

Un ***cercle*** est l'ensemble des points du plan situés à une distance constante (***le rayon***) d'un point donné (***le centre***).

Un ***disque*** de centre C et de rayon r est l'ensemble des points du plan dont la distance à C est ***inférieure ou égale*** à r. (Il s'agit en fait de l'étendue, de la surface délimitée par la circonférence).



[CB] est un ***rayon*** du cercle ;
[AB] un ***diamètre*** et [KL] une ***corde***
[KL] « sous-tend » 2 arcs : un petit et un grand .

Un ***arc de cercle*** est une partie d'un cercle comprise entre deux points distincts de ce cercle

Formules :

périmètre du cercle : $l = 2\pi r$

aire du disque : $A = \pi r^2$

Une droite est ***sécante*** à un cercle lorsqu'elle possède <u>deux</u> points d'intersection avec ce dernier.

Une droite est ***tangente*** à un cercle lorsqu'elle possède <u>un et un seul</u> point d'intersection avec lui. Ce point est appelé ***point de tangence***. Pour tracer la tangente en un point d'un cercle, il suffit de tracer la droite perpendiculaire au rayon en ce point.

Une droite est ***extérieure*** à un cercle lorsqu'elle ne possède <u>aucun</u> point d'intersection avec le cercle considéré.

2. Arcs et angles

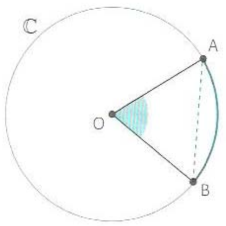
Définitions :

Un ***angle au centre*** est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

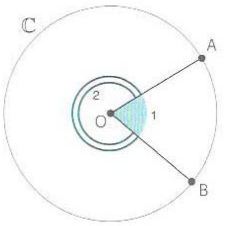
Un ***angle inscrit*** est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés sont des cordes du cercle.

Un ***angle tangentiel*** est un angle dont le sommet appartient au cercle, dont un des côtés est une corde et l'autre la tangente à l'une des extrémités de cette corde.

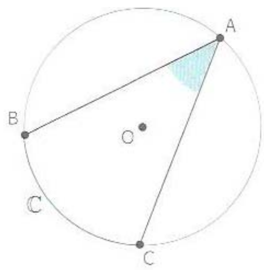
Un ***secteur circulaire*** est une partie d'un disque comprise entre deux rayons.



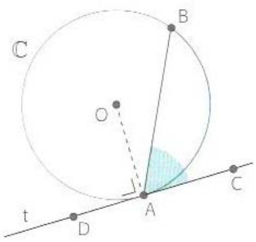
$A\hat{O}B$ est un angle au centre du cercle C, il intercepte l'arc AB .
On dit parfois qu'il intercepte la corde [AB].



$\hat{O}_1$ est l'angle au centre qui intercepte le « petit » arc AB et
$\hat{O}_2$ est l'angle au centre qui intercepte le « grand » arc AB.
Dans la suite du cours, sauf avis contraire, nous considèrerons l'angle au centre interceptant le « petit » arc.



$B\hat{A}C$ est un angle inscrit dans le cercle C.
Il intercepte l'arc BC ou la corde [BC].

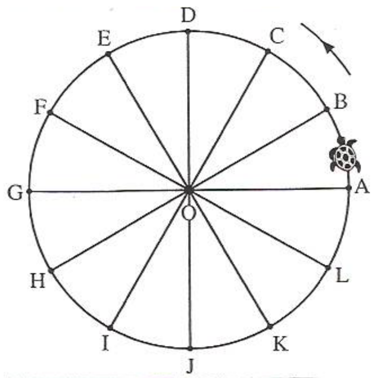


$B\hat{A}C$ est un angle tangentiel au cercle C, il intercepte le « petit » arc AB.
$B\hat{A}D$ est un angle tangentiel au cercle C, il intercepte le « grand » arc AB.

Activité :

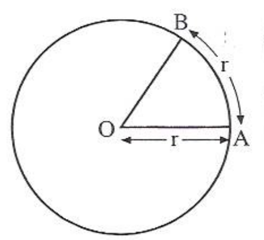
Une tortue se situe initialement au point A. Elle circule tranquillement le long du cercle de centre O et de rayon « r » mètres en suivant la direction de la flèche.

- Si elle effectue un tour complet, quelle distance aura-t-elle parcourue ?
- Et si elle s'arrête en C ; F ; G ; I ; K ?
- Et si elle s'arrête en D après avoir effectué deux tours complets ?



Jusqu'à maintenant, l'unité utilisée pour mesurer les angles était le degré. Il existe d'autres unités de mesure dont ***le radian.***

Un radian est l'amplitude d'un angle au centre d'un cercle interceptant un arc dont la longueur est égale à celle du rayon de ce cercle.



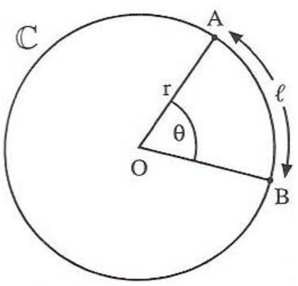
Avec cette nouvelle unité nous allons pouvoir mesurer les longueurs d'arcs de cercle.

- **Si un arc de longueur l d'un cercle de rayon r sous-tend un angle au centre de θ radians, alors l = θ r.**

<u>Données</u> : cercle de centre O et de rayon r

$\hat{AOB}$ angle au centre d'amplitude θ radians interceptant un arc de longueur l sur le cercle.

<u>Thèse</u> : l = θ r.



Démonstration : elle réside en un tableau de proportionnalité

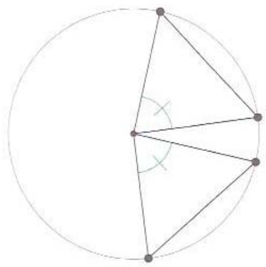
Angle au centre	Longueur (ℓ) de l'arc intercepté
1	r
θ	$r \cdot \theta$

$\times\theta$ $\times\theta$

On obtient alors $l = \theta \,.\, r$.

Conséquence :

Dans tout cercle, des angles au centre de même amplitude interceptent des arcs de même longueur.



- **Si θ est une amplitude en radians d'un angle au centre d'un cercle de rayon r, alors l'aire du secteur circulaire déterminé par cet angle au centre est égale à** $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

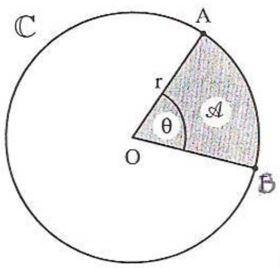
Données : cercle de centre O et de rayon r

Thèse : $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

$A\hat{O}B$ angle au centre d'amplitude θ radians
($0 \leq \theta \leq 2\pi$)

AOB secteur circulaire déterminé par l'angle au centre

Démonstration : elle réside également en un tableau de proportionnalité



$:2\pi$ $\times\theta$

Angle au centre	Longueur de l'arc intercepté	Aire ($\mathcal{A}$) du secteur
2π	$2\pi r$	πr^2
1	r	$\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2}$
θ	$r\theta$	$\frac{1}{2} r^2 \theta$

$:2\pi$ $\times\theta$

- **<u>Théorème de l'angle inscrit</u> :**

Dans tout cercle, l'amplitude d'un angle inscrit égale la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

<u>Données</u> : cercle de centre O et de rayon r

A ; B et C appartiennent au cercle

$B\hat{A}C$ est un angle inscrit

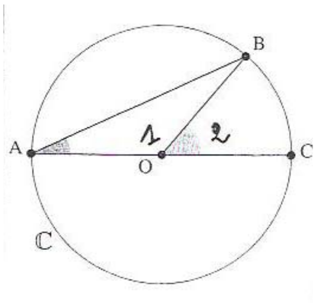
interceptant le même arc

$B\hat{O}C$ est un angle au centre

<u>Thèse</u> : $\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{O}$ ou $\hat{O} = 2\hat{A}$

<u>Démonstration</u> : trois cas peuvent se présenter

1er cas : O appartient à un côté de l'angle inscrit

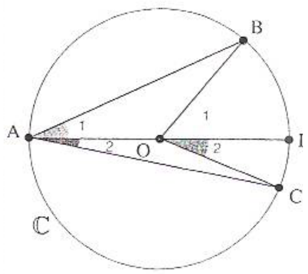


AOB est un triangle isocèle car | OA | = | OB| = r ; donc $\hat{A} = \hat{B}$.

$\hat{O}_1 = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 2\hat{A}$

$\hat{O}_2 = 180° - \hat{O}_1 = 180° - (180° - 2\hat{A}) = 2\hat{A}$

2ème cas : O est à l'intérieur de l'angle inscrit



Traçons le diamètre [AD] partageant

$\hat{A}$ en $\hat{A}_1$ et $\hat{A}_2$ ainsi que $\hat{O}$ en $\hat{O}_1$ et $\hat{O}_2$

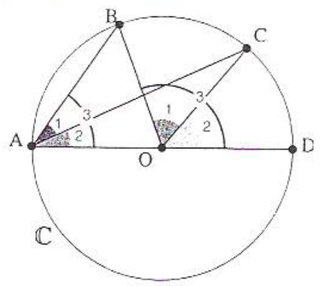
Utilisons le résultat obtenu au 1er cas ; nous pouvons alors dire que :

$\hat{O}_1 = 2\hat{A}_1$ et $\hat{O}_2 = 2\hat{A}_2$

Additionnons ces deux égalités membre à membre ; il vient :

$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{O} = 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A}$ donc $\hat{O} = 2\hat{A}$

3ème cas : O est à l'extérieur de l'angle inscrit.



Traçons le diamètre [AD] déterminant les angles $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$ et $\hat{O}_2, \hat{O}_3$

Par le 1er cas nous savons que $2\,\hat{A}_3 = \hat{O}_3$ et que $2\,\hat{A}_2 = \hat{O}_2$

Soustrayons membre à membre ces deux égalités ; nous obtenons :

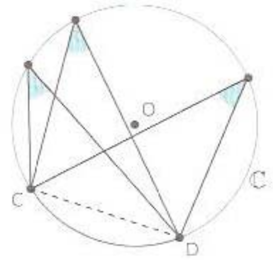
$2\hat{A}_3 - 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_3 - \hat{A}_2) = 2\hat{A}_1 = \hat{O}_3 - \hat{O}_2 = \hat{O}_1$ donc $2\hat{A}_1 = \hat{O}_1$.

Et le théorème est démontré !

Conséquences :

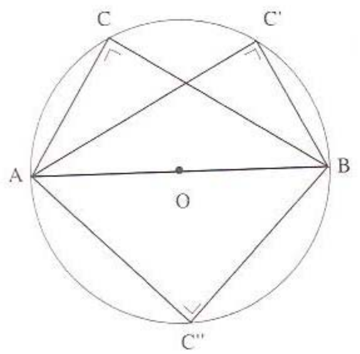
Dans tout cercle, des angles inscrits interceptant le même arc ont même amplitude.

En effet : l'amplitude de chacun d'eux vaut la moitié de celle de l'angle au centre interceptant l'arc en question.



Un triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

En effet : l'amplitude de l'angle au centre vaut 180°
l'arc étant un demi cercle
donc l'amplitude de l'angle inscrit vaut 90°.



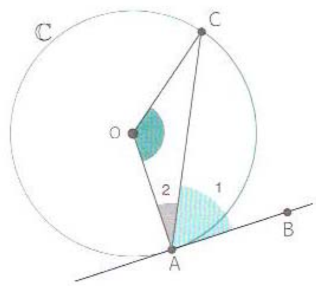
- **<u>Théorème de l'angle tangentiel :</u>**

Dans tout cercle, l'amplitude d'un angle tangentiel égale la moitié de celle de l'angle au centre interceptant le même arc.

<u>Données :</u> cercle de centre O et de rayon r
A et C appartiennent au cercle

<u>Thèse :</u> $\hat{O} = 2\hat{A}_1$

AB tangente au cercle en A
$\hat{A}_1 = B\hat{A}C$ angle tangentiel interceptant [AC]
$\hat{O} = A\hat{O}C$ angle au centre interceptant [AC]



<u>Démonstration :</u>
Définissons l'angle $\hat{A}_2 = C\hat{A}O$.
Le triangle AOC est isocèle car [OC] et [OA] sont des rayons du cercle. On a alors $\hat{A}_2 = \hat{C}$.
De plus : $\hat{O} + \hat{C} + \hat{A}_2 = 180°$
Mais : $\hat{A}_2 + \hat{A}_1 = 90°$
Il vient alors : $\hat{O} + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2)$
$\hat{O} = 2\hat{A}_1$
Cqfd.

<u>Conséquence :</u>

Tout angle tangentiel à un cercle possède même amplitude qu'un angle inscrit interceptant le même arc.

En effet : l'amplitude de chacun d'eux vaut la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.